معادلات رياضية فيزيائية

السنة الثالثة رياضيات

اعداد الأستاذ

أحمد حاتم أبو حاتم

المتطابقات التربيعية والمتطابقات التكعيبية:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

دساتير الانتقال من المجموع إلى الجداء:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

دساتير الانتقال من جداء إلى مجموع:

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$$

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$$

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) - \sin(x-y)\right]$$

دساتير الانتقال إلى نصف الزاوية:

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \quad , \quad \tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

دساتير الانتقال إلى ضعف الزاوية:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$$

دساتير الانتقال من ثلاثة أضعاف زاوية إلى الزاوية:

$$\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$\cos(3x) = -3\cos x + 4\cos^3 x$$

الانتقال من زاوية إلى ثلاثة أضعاف الزاوية:

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x)$$

$$\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos(3x)$$

حل بعض المعادلات المثلثية:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = n\pi$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

وكما أنَّ:

$$\sin(n\pi) = 0 \ , \ \sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^n$$

$$\cos(n\pi) = (-1)^n \ , \ \cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] = 0$$

مشتق تكامل حدوده تابعة لوسيط:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy = f(x,\beta(x))\beta'(x) - f(x,\alpha(x))\alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy$$

هذه التكاملات تعتبر قواعد في مادة المعادلات الفيزيائية ويحق لنا وضع الجواب مباشرة

$$1)\ \int_0^{\pi,\,2\pi} \sin(n\xi)\sin(m\,\xi)d\,\xi = \begin{cases} \text{نصف طول المجال} & ;\ n=m \\ 0 & ;\ m\neq n \end{cases}$$

$$2)\ \int_0^{\pi,\,2\pi} \cos(n\xi)\cos(m\,\xi)d\,\xi = \begin{cases} \text{نصف طول المجال} & ;\ n=m \\ 0 & ;\ m\neq n \end{cases}$$

$$3)\ \int_0^{\pi,\,2\pi} \sin(n\xi)\cos(m\,\xi)d\,\xi = 0$$

$$4)\ \int_0^{\ell} \xi\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\,\xi = \frac{\ell^2}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

$$5)\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz = \sqrt{\pi}\quad ,\quad 6)\ \int_{-\infty}^{+\infty} z\,e^{-z^2}dz = 0\quad ,\quad 7)\ \int_{-\infty}^{+\infty} z^2e^{-z^2}dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$8)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\mu z)\,e^{-z^2}dz = 0\quad ,\quad 9)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\mu z)\,e^{-z^2}dz = \sqrt{\pi}\,e^{-\frac{\mu^2}{4}}$$

إن التكاملات (6) , (8) هي تكاملات لدوال فردية على مجالات متناظرة وبالتالي فإن قيمتها تساوي الصفر

المعادلات الرياضية الفيزيائية

❶ **معادلة الذبذبات المتجانسة(علاقة دالامبير):**

$$u_{tt}=a^2u_{xx}\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$u(x,0)=\varphi(x)\ ,\ u_t(x,0)=\psi(x)\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

إن حل المعادلة (1) والمحقق للشروط الابتدائية (2) يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz$$

❷ **معادلة الذبذبات غير المتجانسة:**

$$\frac{1}{a^2}u_{tt}=u_{xx}+f(x,t)\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$u(x,0)=\varphi(x)\ ,\ u_t(x,0)=\psi(x)\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

إن حل المعادلة (1) والمحقق للشروط الابتدائية (2) يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{a}{2}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau$$

❸ **المسألة الحدية المتجانسة بالشروط الحدية الصفرية(متجانسة – صفرية):**

$$u_{tt}=a^2u_{xx}\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$u(x,0)=\varphi(x)\ ,\ u_t(x,0)=\psi(x)\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$u(0,t)=0\ ,\ u(\ell,t)=0\quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

إن حل المعادلة (1) والمحقق للشروط الابتدائية (2) والشروط الحدية (3) يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\quad\cdots\cdots\cdots(4)$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi\ ,\ D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

ملاحظة هامة: في حال كانت الشروط الحدية بالشكل: $u(0,t)=0\ ,\ u_x(\ell,t)=0$ نستبدل في الحل العام كل n بـ $\left(\frac{2n+1}{2}\right)$

والسلسلة تبدأ من الصفر.

❹ **المسألة الحدية غير المتجانسة بالشروط الحدية الصفرية (غير متجانسة – صفرية):**

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t)\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$u(x,0)=\varphi(x)\ ,\ u_t(x,0)=\psi(x)\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$u(0,t)=0\ ,\ u(\ell,t)=0\quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

إن حل المعادلة (1) والمحقق للشروط الابتدائية (2) والشروط الحدية (3) يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\quad\cdots\cdots\cdots(4)$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi\ ,\ D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

$$T_n(t)=\frac{\ell}{n\pi a}\int_0^t\sin\left[\frac{n\pi}{\ell}a(t-\tau)\right]f_n(\tau)d\tau\ ,\ f_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(\xi,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

ملاحظة هامة: في حال كانت الشروط الحدية بالشكل: $u(0,t)=0 \ , \ u_x(\ell,t)=0$ نستبدل في الحل العام كل n بـ $\left(\frac{2n+1}{2}\right)$ والسلسلة تبدأ من الصفر.

❺ المسألة الحدية غير المتجانسة بالشروط الحدية غير الصفرية (غير متجانسة – غير صفرية):

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad \cdots\cdots(1)$$
$$u(x,0) = \varphi(x) \ , \ u_t(x,0) = \psi(x) \quad \cdots\cdots(2)$$
$$u(0,t) = \mu_1(t) \ , \ u(\ell,t) = \mu_2(t) \quad \cdots\cdots(3)$$

إن حل المسألة المعطاة يعطى بالشكل:

$$u(x,t) = U(x,t) + v(x,t) \quad \cdots\cdots(4)$$

علماً أنَّ:

$$U(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{\ell}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right]$$

أما الدالة $v(x,t)$ فهي حل المسألة الحدية غير المتجانسة بالشروط الحدية الصفرية:

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \bar{f}(x,t) \quad \cdots\cdots(1') \quad ; \quad \bar{f}(x,t) = f(x,t) - \left[U_{tt} - a^2 U_{xx}\right]$$
$$v(x,0) = \bar{\varphi}(x) \ , \ v_t(x,0) = \bar{\psi}(x) \quad \cdots\cdots(2') \quad ; \quad \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - U(x,0) \ , \ \bar{\psi}(x) = \psi(x) - U_t(x,0)$$
$$v(0,t) = 0 \ , \ v(\ell,t) = 0 \quad \cdots\cdots(3')$$

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \quad \cdots\cdots(4)$$

علماً أنَّ:

$$C_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \bar{\varphi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi \ , \ D_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell} \bar{\psi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$
$$T_n(t) = \frac{\ell}{n\pi a}\int_0^{t} \sin\left[\frac{n\pi}{\ell}a(t-\tau)\right]\overline{f_n}(\tau)d\tau \ , \ \overline{f_n}(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \bar{f}(\xi,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

ملاحظة هامة: في حال كانت الشروط الحدية بالشكل: $u(0,t)=0 \ , \ u_x(\ell,t)=0$ عندها نختار الدالة $U(x,t)$ بالشكل:

$$U(x,t) = \mu_1(t) + x\,\mu_2(t)$$

ونستبدل في باقي الحل كل n بـ $\left(\frac{2n+1}{2}\right)$ والسلسلة تبدأ من الصفر.

❻ المسألة الحدية ذات عدم التجانسات المستقرة زمنياً:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_0(x) \quad \cdots\cdots(1)$$
$$u(x,0) = \varphi(x) \ , \ u_t(x,0) = \psi(x) \quad \cdots\cdots(2)$$
$$u(0,t) = u_1 = const \ , \ u(\ell,t) = u_2 = const \quad \cdots\cdots(3)$$

إن حل المسألة المعطاة يعطى بالشكل:

$$u(x,t) = U(x) + v(x,t) \quad \cdots\cdots(4)$$

علماً أنَّ $U(x)$ دالة تابعة لـ x فقط وهي حل المعادلة:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 U'' + f_0(x) = 0 \\ U(0) = u_1 \ , U(\ell) = u_2 \end{array}\right\} \cdots\cdots(5)$$

أما الدالة $v(x,t)$ فهي حل المسألة الحدية المتجانسة بالشروط الحدية الصفرية:

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} \quad \cdots\cdots(1')$$
$$v(x,0) = \bar{\varphi}(x) \ , \ v_t(x,0) = \bar{\psi}(x) \quad \cdots\cdots(2') \quad ; \quad \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - U(x) \ , \ \bar{\psi}(x) = \psi(x)$$
$$v(0,t) = 0 \ , \ v(\ell,t) = 0 \quad \cdots\cdots(3')$$

وحلها يعطى بالشكل:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\quad\cdots\cdots\cdots(4')$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\varphi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi\ ,\ D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\overline{\psi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

الفصل الثالث

❶ المسألة الحدية المتجانسة بالشروط الحدية الصفرية(متجانسة –صفرية):

$$u_t=a^2u_{xx}\quad,\ 0<x<\ell\ ,\ 0<t\le T\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$u(x,0)=\varphi(x)\quad,\ 0\le x\le\ell\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$u(0,t)=0\quad,\ u(\ell,t)=0\quad,\ 0\le t\le T\quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

إن حل المعادلة (1) والمحقق للشرط الابتدائي (2) والشروط الحدية (3) يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2t}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\quad\cdots\cdots\cdots(4)$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

❷ المسألة الحدية المتجانسة بالشروط الحدية غير الصفرية(متجانسة –غير صفرية):

$$u_t=a^2u_{xx}\quad,\ 0<x<\ell\ ,\ 0<t\le T\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$u(x,0)=\varphi(x)\quad,\ 0\le x\le\ell\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$u(0,t)=\mu_1(t)\quad,\ u(\ell,t)=\mu_2(t)\quad,\ 0\le t\le T\quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

إن حل المعادلة (1) والمحقق للشرط الابتدائي (2) والشروط الحدية (3) يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

حيث أنَّ:

$$T_n(t)=\frac{2n\pi a^2}{\ell^2}e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2t}\int_0^{t}e^{\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2\tau}\left[\mu_1(\tau)-(-1)^n\mu_2(\tau)\right]d\tau+C_n\ e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2t}$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

❸ المسألة الحدية غير المتجانسة بالشروط الحدية الصفرية(غير متجانسة – صفرية):

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t)\ ,\ 0<x<\ell\ ,\ 0<t<T\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$u(x,0)=\varphi(x)\ ,\ 0\le x\le\ell\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$u(0,t)=0\ ,\ u(\ell,t)=0\quad,\ 0<t<T\quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

إن حل المعادلة (1) والمحقق للشرط الابتدائي (2) والشروط الحدية (3) يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2t}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi \quad , \quad u_n(t)=\int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2(t-\tau)}f_n(\tau)d\tau$$

$$f_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(\xi,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

❹ المسألة الحدية غير المتجانسة بالشروط الحدية غير الصفرية(غير متجانسة – غير صفرية):

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t) \quad , 0<x<\ell , t>0 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$u(x,0)=\varphi(x) \ , \ 0\le x\le\ell \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

$$u(0,t)=\mu_1(t) \ , \ u(\ell,t)=\mu_2(t) \quad , t\ge 0 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

إن حل المسألة المعطاة يعطى بالشكل: $u(x,t)=U(x,t)+v(x,t) \quad \cdots\cdots\cdots(4)$

علماً أنَّ:

$$U(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{\ell}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]$$

أما الدالة $v(x,t)$ فهي حل المسألة الحدية غير المتجانسة بالشروط الحدية الصفرية:

$$v_{tt}=a^2v_{xx}+\bar{f}(x,t) \quad \cdots\cdots\cdots(1') \quad ; \quad \bar{f}(x,t)=f(x,t)-\left[U_t-a^2U_{xx}\right]$$

$$v(x,0)=\bar{\varphi}(x) \quad \cdots\cdots\cdots(2') \quad ; \quad \bar{\varphi}(x)=\varphi(x)-U(x,0)$$

$$v(0,t)=0 \ , \ v(\ell,t)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(3')$$

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \quad \cdots\cdots\cdots(4')$$

علماً أن:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\bar{\varphi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi \quad , \quad v_n(t)=\int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2(t-\tau)}\overline{f_n}(\tau)d\tau \quad , \quad \overline{f_n}(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\bar{f}(\xi,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

ملاحظة هامة: في حال أعطيت الشروط الحدية بالشكل: $u_x(0,t)=\mu_1(t) \quad , \quad u(\ell,t)=0$ عندئذٍ فإننا نختار الدالة $U(x,t)$ بالشكل:

$$U(x,t)=x\,\mu_1(t)+\frac{x^2}{\ell}\left[\frac{\mu_2(t)}{\ell}-\mu_1(t)\right]$$

ونبدل في باقي الدساتير كل n بـ $\frac{2n+1}{2}$ وكل $\sin$ بـ $\cos$ والسلسلة تبدأ من الصفر.

❺ معادلة التوصيل الحراري المتجانسة على مستقيم لانهائي(لا توجد شروط حدية):

إنَّ حل المعادلة: $u_t=a^2u_{xx} \quad , \quad -\infty<x<+\infty \ , \ 0<t<T \quad \cdots\cdots\cdots(1)$

والمحقق للشرط الابتدائي: $u(x,0)=\varphi(x) \ , \ 0\le t\le T \quad \cdots\cdots\cdots(2)$

يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)\frac{d\xi}{2a\sqrt{t}}$$

❻ معادلة التوصيل الحراري غير المتجانسة على مستقيم لانهائي(لا توجد شروط حدية):

إنَّ حل المعادلة: $u_t=a^2u_{xx}+f(x,t), \quad -\infty<x<+\infty \ , \ 0<t<T \quad \cdots\cdots\cdots(1)$

والمحقق للشرط الابتدائي: $u(x,0)=\varphi(x) \ , \ 0\le t\le T \quad \cdots\cdots\cdots(2)$

يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)\frac{d\xi}{2a\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}f(\xi,\tau)\frac{d\xi}{2a\sqrt{t-\tau}}d\tau$$

❼ المعادلة من النمط المكافئ وذات الأمثال الثابتة:

$$u_t=a^2u_{xx}+bu_x+cu+f(x,t)\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحققة للشرط الابتدائي:

$$u(x,0)=\varphi(x)\cdots\cdots\cdots(2)$$

يعطى حل المسألة وفق التحويل التالي:

$$u(x,t)=e^{\left[c-\frac{b^2}{4a^2}\right]t-\frac{b}{2a^2}x}v(x,t)\quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

نشتق العلاقة (3) مرة بالنسبة لـ t ومرتين بالنسبة لـ x ثم نعوض في $(1),(2)$ لنحصل على مسألة جديدة من الشكل:

$$v_t=a^2v_{xx}+\bar{f}(x,t)\quad\cdots\cdots\cdots(1')$$

والمحققة للشرط الابتدائي:

$$v(x,0)=\bar{\varphi}(x)\cdots\cdots\cdots(2')$$

علماً أنَّ:

$$\bar{f}(x,t)=f(x,t)e^{\left[\frac{b^2}{4a^2}-c\right]t+\frac{b}{2a^2}x}\quad,\quad\bar{\varphi}(x)=\varphi(x)e^{\frac{b}{2a^2}x}$$

وحل المسألة الجديدة قد مر معنا سابقاً.

الفصل الرابع – المعادلات من النمط الناقصي

✌ حل معادلة لابلاس في الإحداثيات الأسطوانية ، ولدينا الحالات التالية:

① **داخل دائرة** نصف قطرها a بالشرط الحدي $u|_{\rho=a}=f(\varphi)$ يعطى بالدستور التالي:

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)\;;\;\rho\le a$$

حيث أن الثوابت B_n,A_n يتم استنتاجها من منشور فورييه للدالة $f(\varphi)$.

② **خارج دائرة** نصف قطرها a بالشرط الحدي $u|_{\rho=a}=f(\varphi)$ يعطى بالدستور التالي:

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\rho^n}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)\;;\;\rho\ge a$$

حيث أن الثوابت B_n,A_n يتم استنتاجها من منشور فورييه للدالة $f(\varphi)$.

③ **في المنطقة** $R_1<\rho<R_2$ **بالشرطين الحديين :** $u|_{\rho=R_1}=f_1(\varphi)\;,\;u|_{\rho=R_2}=f_2(\varphi)$ يعطى بالدستور التالي:

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\rho^n+\frac{C_n}{\rho^n}\right)\cos n\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n\rho^n+\frac{D_n}{\rho^n}\right)\sin n\varphi+a\ln\rho+b$$

✌ حل معادلة لابلاس في الإحداثيات الكروية في حالة $u=u(r,\theta)$ **، ولدينا الحالات التالية:**

① **داخل كرة** نصف قطرها R بالشرط الحدي $u|_{r=R}=f(\theta)$ يعطى بالدستور التالي:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nr^nP_n(\cos\theta)\;;\;r\le R$$

حيث أن الثوابت B_n,A_n يتم استنتاجها من منشور فورييه للدالة $f(\varphi)$.

② **خارج كرة** نصف قطرها a بالشرط الحدي $u|_{r=R}=f(\theta)$ يعطى بالدستور التالي:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\,r^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)\quad,\quad r\geq R$$

حيث أن الثوابت $B_n\,,A_n$ يتم استنتاجها من منشور فورييه للدالة $f(\varphi)$.

③ **في المنطقة** $R_1<\rho<R_2$ **بالشرطين الحديين :** $u|_{r=R_1}=f_1(\theta)\ ,\ u|_{r=R_2}=f_2(\theta)$ يعطى بالدستور التالي:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n+B_n r^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta)$$

حيث أنه في كل الحالات:

$$P_0(\cos\theta)=1\ ,\ P_1(\cos\theta)=\cos\theta\ ,\ P_2(\cos\theta)=\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta-1\right)$$

$$P_3(\cos\theta)=\frac{1}{2}\left(5\cos^3\theta-3\cos\theta\right)\ ,\ P_4(\cos\theta)=\frac{1}{8}\left(35\cos^4\theta-30\cos^2\theta+3\right)$$

✍ **حل معادلة لابلاس في الحالة العامة** $u=u(r,\varphi,\theta)$ **ولدينا الحالات التالية:**

① **داخل كرة** نصف قطرها R بالشرط الحدي $u|_{r=R}=f(\theta,\varphi)$ يعطى بالدستور التالي:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n(\theta,\varphi)\quad;\quad r\leq R$$

② **خارج كرة** نصف قطرها a بالشرط الحدي $u|_{r=R}=f(\theta,\varphi)$ يعطى بالدستور التالي:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{(n+1)} Y_n(\theta,\varphi)\quad,\quad r\geq R$$

علماً أنّ:

$$Y_0=a_0$$

$$Y_1=a_1\cos\theta+\left(b_1\cos\varphi+c_1\sin\varphi\right)\sin\theta$$

$$Y_2=a_2\left(3\cos^2\theta-1\right)+\left(b_2\cos\varphi+c_2\sin\varphi\right)\sin\theta\cos\theta+\left(d_2\cos2\varphi+e_2\sin2\varphi\right)\sin^2\theta$$

أحمد حاتم أبو حاتم

❶**(الفصل الثاني للعام 2015 – 2016)**: أوجد حل المعادلة:

$$u_{xy} - yu_y + u = e^{xy}$$

والمحقق للشروط الابتدائية الآتية: $u_y\big|_{y=0} = -x^2 + \frac{1}{2}x \quad , \quad u\big|_{y=0} = 2x + \frac{1}{2}$

ثم استنتج أن الحل ليس وحيداً.

الحل: إن المعادلة المعطاة مكتوبة بالشكل النموذجي، ولحلها نجري التحويل التالي:

$$u_y = v \quad \Rightarrow u_{xy} = v_x$$

ومنه فالمعادلة المعطاة تكتب بالشكل:

$$v_x - yv + u = e^{xy} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u = yv - v_x + e^{xy}} \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

وباشتقاق العلاقة الأخيرة بالنسبة لـ y نجد أن:

$$v_{xy} - v - yv_y + u_y = xe^{xy}$$

وبما أن $u_y = v$ فإن :

$$v_{xy} - v - yv_y + v = xe^{xy} \quad \Rightarrow$$

$$v_{xy} - yv_y = xe^{xy}$$

ولحل المعادلة الأخيرة نجري التحويل التالي: $v_y = w \quad \Rightarrow v_{xy} = w_x$

ومنه تصبح المعادلة الأخيرة بالشكل:

$$w_x - yw = xe^{xy}$$

بتثبيت y نحصل على معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى بالدالة w والمتحول المستقل x ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu = e^{\int -y\,dx} = e^{-xy}$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{-xy}w\right] = e^{-xy}\left[xe^{xy}\right] = x$$

بالمكاملة بالنسبة لـ x علماً أن y ثابت نجد أنَّ:

$$e^{-xy}w = \frac{1}{2}x^2 + \psi(y) \quad \Rightarrow w = \frac{1}{2}x^2e^{xy} + \psi(y)e^{xy}$$

ولدينا: $w = v_y$ ومنه فإن المعادلة الأخيرة تكتب بالشكل:

$$v_y = \frac{1}{2}x^2e^{xy} + \psi(y)e^{xy}$$

بتثبيت x والمكاملة بالنسبة لـ y نجد أنَّ:

$$\boxed{v = \frac{1}{2}x\,e^{xy} + \int_0^y \psi(\eta)e^{x\eta}d\eta + \varphi(x)} \Rightarrow \boxed{u_y = \frac{1}{2}x\,e^{xy} + \int_0^y \psi(\eta)e^{x\eta}d\eta + \varphi(x)}$$

لنشتق طرفي العلاقة الأخيرة بالنسبة لـ x فنجد أن:

$$\boxed{v_x=\frac{1}{2}(1+xy)e^{xy}+\int_0^y \eta\psi(\eta)e^{x\eta}d\eta+\varphi'(x)}$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$u=yv-v_x+e^{xy}=$$

$$=\frac{1}{2}xy\,e^{xy}+\int_0^y y\psi(\eta)e^{x\eta}d\eta+y\varphi(x)-\frac{1}{2}(1+xy)e^{xy}-\int_0^y \eta\psi(\eta)e^{x\eta}d\eta-\varphi'(x)+e^{xy}\;\Rightarrow$$

$$u(x,y)=\frac{1}{2}e^{xy}+\int_0^y (y-\eta)\psi(\eta)e^{x\eta}d\eta+y\varphi(x)-\varphi'(x)$$

وهو الحل العام المطلوب.

$$u(x,y)=\frac{1}{2}e^{xy}+\int_0^y (y-\eta)\psi(\eta)e^{x\eta}d\eta+y\varphi(x)-\varphi'(x)$$

وللحصول على الحل المحقق للشروط الابتدائية نطبق هذه الشروط على الحل العام:

تطبيق الشرط الأول:

$$2x+\frac{1}{2}=u\big|_{y=0}=\frac{1}{2}-\varphi'(x)\;\Rightarrow\;\boxed{\varphi'(x)=-2x}\;\Rightarrow\;\boxed{\varphi(x)=-x^2}$$

تطبيق الشرط الثاني: $-x^2+\frac{1}{2}x=u_y\big|_{y=0}=\frac{1}{2}x+\varphi(x)\;\Rightarrow\;\boxed{\varphi(x)=-x^2}$

وبالاستفادة مما سبق نجد أن الحل المطلوب هو:

$$\boxed{u(x,y)=\frac{1}{2}e^{xy}-x^2y+2x+\int_0^y (y-\eta)\psi(\eta)e^{x\eta}d\eta}$$

حيث أن $\psi(y)$ دالة اختيارية ، وبالتالي يتضح أن للمعادلة المعطاة عدد غير منته من الحلول والتي تحقق الشروط السابقة.

❷**(الدورة الإضافية للعام 2014 – 2015)** لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(x+y)u_y+u\right]=2(x+y)$$

والمطلوب:

1) أثبت أن المعادلة المعطاة من النمط الزائدي في المنطقة $y>0\,,\;x<\infty$ ، ثم أوجد الحل العام لها.

2) أوجد الحل الخاص لها والمحقق للشروط الابتدائية:

$$u\big|_{x=y}=y^2\quad,\quad u_y\big|_{x=y}=1+y$$

الحـل: إن المعادلة المعطاة تكتب بالشكل:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(x+y)u_y+u\right]=2(x+y)\ \Rightarrow (x+y)u_{xy}+u_y+u_x=2(x+y)$$

ومن الواضح أن: $A=0\,,\,B=\frac{(x+y)}{2}\,,\,C=0$

وبالتالي فإن:

$$B^2-AC=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2>0$$

والمعادلة المعطاة من النمط الزائدي.

ولإيجاد الحل العام لها:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(x+y)u_y+u\right]=2(x+y)$$

نثبت y ونكامل بالنسبة لـ x:

$$(x+y)u_y+u=(x+y)^2+\psi_1(y)$$

وبتثبيت x نحصل على معادلة تفاضلية بالدالة u والمتحول المستقل y وبملاحظة أنَّ هذه المعادلة تامة وأن الطرف الأيسر لها يكتب على الشكل:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(x+y)u\right]=(x+y)^2+\psi_1(y)$$

وبالمكاملة بالنسبة لـ y علماً أنَّ x ثابت نجد أن:

$$(x+y)u=\frac{1}{3}(x+y)^3+\psi(y)+\varphi(x)$$

وبالتالي فإنَّ الحل العام للمعادلة المعطاة هو:

$$\boxed{u(x,y)=\frac{1}{3}(x+y)^2+\frac{1}{(x+y)}\left[\psi(y)+\varphi(x)\right]}$$

ولإيجاد الحل الخاص نطبق الشروط الابتدائية على الحل العام بالشكل:

تطبيق الشرط الابتدائي الأول:

$$y^2=u\big|_{x=y}=\frac{4}{3}y^2+\frac{1}{2y}\left[\psi(y)+\varphi(y)\right]\ \Rightarrow \frac{1}{2y}\left[\psi(y)+\varphi(y)\right]=-\frac{1}{3}y^2\Rightarrow$$

$$\psi(y)+\varphi(y)=-\frac{2}{3}y^3\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

تطبيق الشرط الابتدائي الثاني:

لنوجد u_y :

$$u_y=\frac{2}{3}(x+y)-\frac{1}{(x+y)^2}\left[\psi(y)+\varphi(x)\right]+\frac{1}{(x+y)}\psi'(y)$$

وبتطبيق الشرط الابتدائي الثاني نجد أن:

$$1+y=u_y\Big|_{x=y}=\frac{4}{3}y-\frac{1}{4y^2}\left[\psi(y)+\varphi(y)\right]+\frac{1}{2y}\psi'(y)\Rightarrow$$

$$1+y=\frac{4}{3}y-\frac{1}{4y^2}\left[\psi(y)+\varphi(y)\right]+\frac{1}{2y}\psi'(y)\quad\cdots\cdots\cdots(**)$$

وبتعويض العلاقة $(*)$ في العلاقة $(**)$ نجد أنَّ:

$$1+y=\frac{4}{3}y-\frac{1}{4y^2}\left[-\frac{2}{3}y^3\right]+\frac{1}{2y}\psi'(y)\Rightarrow$$

$$1+y=\frac{4}{3}y+\frac{1}{6}y+\frac{1}{2y}\psi'(y)\Rightarrow\frac{1}{2y}\psi'(y)=1+y-\frac{4}{3}y-\frac{1}{6}y=1-\frac{1}{2}y\Rightarrow$$

$$\psi'(y)=2y-y^2\Rightarrow\boxed{\psi(y)=y^2-\frac{1}{3}y^3}$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$y^2-\frac{1}{3}y^3+\varphi(y)=-\frac{2}{3}y^3\Rightarrow\varphi(y)=-\frac{2}{3}y^3-y^2+\frac{1}{3}y^3=-y^2-\frac{1}{3}y^3\Rightarrow$$

$$\varphi(y)=-y^2-\frac{1}{3}y^3\Rightarrow\boxed{\varphi(x)=-x^2-\frac{1}{3}x^3}$$

وبتعويض $\varphi(x)$ و $\psi(y)$ في عبارة الحل العام نجد أن الحل الخاص المطلوب هو:

$$u(x,y)=\frac{1}{3}(x+y)^2+\frac{1}{(x+y)}\left[y^2-\frac{1}{3}y^3-x^2-\frac{1}{3}x^3\right]=$$

$$=\frac{1}{3}(x+y)^2+\frac{1}{(x+y)}\left[\left(y^2-x^2\right)-\frac{1}{3}\left(y^3+x^3\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}(x+y)^2+\frac{1}{(x+y)}\left[(y+x)(y-x)-\frac{1}{3}(y+x)\left(y^2-yx+x^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}(x+y)^2+(y-x)-\frac{1}{3}\left(y^2-yx+x^2\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left[(x+y)^2-\left(y^2-yx+x^2\right)\right]+(y-x)$$

$$=\frac{1}{3}\left[x^2+2xy+y^2-y^2+xy-x^2\right]+(y-x)$$

$$=\frac{1}{3}[3xy]+(y-x)=xy+y-x=x(y-1)+y \Rightarrow \boxed{u(x,y)=x(y-1)+y}$$

❸ **(الفصل الثاني للعام 2007 – 2008) أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية :**

$$u_{xy}-\frac{1}{y}u_y+\frac{1}{y^2}u=0$$

والمحقق للشروط الابتدائية :

$$u|_{x=0}=y-y^3 \quad , \quad u_x|_{x=0}=-y^2$$

الحل : إن المعادلة المعطاة مكتوبة بالشكل النموذجي، وتكتب بالشكل:

$$u_{xy}-\frac{1}{y}u_y+\frac{1}{y^2}u=0 \Rightarrow u_{xy}-\left(\frac{1}{y}u_y-\frac{1}{y^2}u\right)=0 \Rightarrow u_{xy}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}u\right)=0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(u_x)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}u\right)=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(u_x-\frac{1}{y}u\right)=0$$

بتثبيت x والمكاملة بالنسبة لـ y نجد أن:

$$u_x-\frac{1}{y}u=\varphi(x)$$

وبتثبيت y نحصل على معادلة تفاضلية بالدالة u والمتحول المستقل ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu=e^{\int-\frac{1}{y}dx}=e^{-\frac{x}{y}}$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[u\,e^{-\frac{x}{y}}\right]=e^{-\frac{x}{y}}\varphi(x)$$

وبتثبيت y والمكاملة بالنسبة لـ x نجد أن:

$$u\,e^{-\frac{x}{y}}=\int_0^x e^{-\frac{\xi}{y}}\varphi(\xi)d\xi+\psi(y) \Rightarrow \boxed{u(x,y)=e^{\frac{x}{y}}\left(\int_0^x e^{-\frac{\xi}{y}}\varphi(\xi)d\xi+\psi(y)\right)}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة ولإيجاد الحل الخاص نستفيد من الشروط الابتدائية:

بتطبيق الشرط الابتدائي الأول نجد :

$$y-y^3=u|_{x=0}=\psi(y) \Rightarrow \boxed{\psi(y)=y-y^3} \cdots\cdots\cdots(1)$$

ولنوجد u_x بالشكل:

$$u_x = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} \left(\int_0^x e^{-\frac{\xi}{y}} \varphi(\xi) d\xi + \psi(y) \right) + e^{\frac{x}{y}} \left(e^{-\frac{x}{y}} \varphi(x) \right) \Rightarrow$$

$$u_x = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} \left(\int_0^x e^{-\frac{\xi}{y}} \varphi(\xi) d\xi + \psi(y) \right) + \varphi(x)$$

بتطبيق الشرط الابتدائي الثاني نجد:

$$-y^2 = u_x\big|_{x=0} = \frac{1}{y}\psi(y) + \varphi(0) \Rightarrow \varphi(0) = -y^2 - \frac{1}{y}\psi(y) \cdots\cdots\cdots(2)$$

وبتعويض العلاقة (1) في العلاقة (2) نجد أن:

$$\varphi(0) = -y^2 - \frac{1}{y}\psi(y) = -y^2 - \frac{1}{y}\left(y - y^3\right) = -y^2 - 1 + y^2 = -1 \Rightarrow \boxed{\varphi(0) = -1}$$

ومنه نجد أن $\varphi(x)$ هي دالة اختيارية تحقق أن $\varphi(0) = -1$ ، بأخذ أحد هذه الحلول ولتكن الدالة $\varphi(x) = -1$، ومنه فإنَّ $\varphi(\xi) = -1$، ثم أنه بالاستفادة مما سبق والتعويض في الحل العام نجد أن :

$$u(x,y) = e^{\frac{x}{y}} \left(\int_0^x e^{-\frac{\xi}{y}} (-1) d\xi + y - y^3 \right) = e^{\frac{x}{y}} \left(ye^{-\frac{\xi}{y}} \Big|_{\xi=0}^{\xi=x} + y - y^3 \right)$$

$$= e^{\frac{x}{y}} \left(ye^{-\frac{x}{y}} - y + y - y^3 \right) = e^{\frac{x}{y}} \left(ye^{-\frac{x}{y}} - y^3 \right) = y - y^3 e^{\frac{x}{y}} \Rightarrow \boxed{u(x,y) = y - y^3 e^{\frac{x}{y}}}$$

وهو الحل الخاص المطلوب .

❹**(الفصل الثاني للعام 2006 – 2007)** أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية التالية :

$$u_{xy} + xu_x + 2y\,u_y + (2xy + 1)u = 0$$

ثم أوجد الحل الخاص المحقق للشروط الابتدائية الآتية :

$$u\big|_{y=0} = x \quad , \quad u_y\big|_{y=0} = -x^2$$

الحـل :

$$u_{xy} + xu_x + 2y\,u_y + (2xy + 1)u = 0 \Rightarrow u_{xy} + xu_x + 2y\,u_y + 2xy\,u + u = 0 \Rightarrow$$

$$\left(u_{xy} + xu_x + u\right) + 2y\left(u_y + x\,u\right) = 0 \Rightarrow \left(u_{xy} + \left(xu_x + u\right)\right) + 2y\left(u_y + x\,u\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}u_y + \frac{\partial}{\partial x}(x\,u)\right) + 2y\left(u_y + x\,u\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x}u_y + \frac{\partial}{\partial x}(x\,u)\right) + 2y\left(u_y + x\,u\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u_y + x\,u\right) + 2y\left(u_y + x\,u\right) = 0$$

بفرض $u_y + x\,u = v \quad \cdots\cdots\cdots(1)$ نجد أن المعادلة الأخيرة تصبح بالشكل :

$$v_x + 2y\,v = 0$$

بتثبيت y نحصل على معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى بالدالة v والمتحول المستقل x ولحلها نوجد عامل التكميل :

$$\mu = e^{\int 2y\,dx} = e^{2xy}$$

بضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[v\,e^{2xy}\right] = 0$$

بتثبيت y والمكاملة بالنسبة لـ x نجد أن :

$$v\,e^{2xy} = \psi(y) \;\Rightarrow\; v = e^{-2xy}\psi(y)$$

وبالاستفادة من العلاقة (1) تصبح العلاقة الأخيرة بالشكل :

$$u_y + x\,u = e^{-2xy}\psi(y)$$

بتثبيت x نحصل على معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى بالدالة u والمتحول المستقل y ولحلها نوجد عامل التكميل :

$$\mu = e^{\int x\,dy} = e^{xy}$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[u\,e^{xy}\right] = e^{-xy}\psi(y)$$

بتثبيت x والمكاملة بالنسبة لـ y نجد أن :

$$u\,e^{xy} = \int_0^y e^{-x\eta}\psi(\eta)\,d\eta + \varphi(x) \;\Rightarrow\; \boxed{u(x,y) = e^{-xy}\left[\int_0^y e^{-x\eta}\psi(\eta)\,d\eta + \varphi(x)\right]}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة ولإيجاد الحل الخاص نستفيد من الشروط الابتدائية :

بتطبيق الشرط الابتدائي الأول نجد :

$$x = u\big|_{y=0} = \varphi(x) \;\Rightarrow\; \boxed{\varphi(x) = x} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

لنوجد u_y بالشكل :

$$u_y = -x\,e^{-xy}\left[\int_0^y e^{-x\eta}\psi(\eta)\,d\eta + \varphi(x)\right] + e^{-xy}\left[e^{-xy}\psi(y)\right] \;\Rightarrow$$

$$u_y = -x\,e^{-xy}\left[\int_0^y e^{-x\eta}\psi(\eta)\,d\eta + \varphi(x)\right] + e^{-2xy}\psi(y)$$

وبتطبيق الشرط الابتدائي الثاني نجد أن :

$$-x^2 = u_y\big|_{y=0} = u_y = -x\,\varphi(x) + \psi(0) \;\Rightarrow\; \boxed{\psi(0) = x\,\varphi(x) - x^2} \cdots\cdots\cdots(2)$$

وبتعويض العلاقة (1) في العلاقة (2) نجد أن :

$$\psi(0) = x^2 - x^2 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\psi(0) = 0}$$

ومنه نجد أن $\psi(y)$ هي دالة اختيارية تحقق أن $\psi(0)=0$، وبأخذ أحد هذه الدوال ولتكن الدالة $\psi(y)=0$، ومنه فإنَّ $\psi(\eta)=0$، ثم بالاستفادة مما سبق والتعويض في الحل العام نجد أن :

$$u(x,y) = e^{-xy}\left[\int_0^y e^{-x\eta}(0)\,d\eta + x\right] \;\Rightarrow\; \boxed{u(x,y) = xe^{-xy}}$$

وهو الحل الخاص المطلوب .

❺ (الفصل الثاني للعام 2013 – 2014)أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية الآتية :

$$u_{xy} - \frac{1}{y}u_x = 2xy$$

ثم أوجد الحل الخاص والمحقق للشروط الابتدائية الآتية:

$$u\big|_{y=x} = x^4 \;,\; u_y\big|_{y=x} = 2x^3$$

الحل : من الواضح أن المعادلة المعطاة مكتوبة بالشكل النموذجي ، ولحلها نكتبها بالشكل التالي :

$$u_{xy} - \frac{1}{y}u_x = 2xy \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial x}\left[u_y - \frac{1}{y}u\right] = 2xy$$

وبتثبيت y والمكاملة بالنسبة لـ x نجد أنَّ: $u_y - \frac{1}{y}u = x^2 y + \psi_1(y)$

بتثبيت x نحصل على معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى بالدالة u والمتحول المستقل y، ولحلها نوجد عامل التكميل :

$$\mu = e^{\int -\frac{1}{y}dy} = e^{\ln\left(\frac{1}{y}\right)} = \frac{1}{y}$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{u}{y}\right] = x^2 + \frac{1}{y}\psi_1(y)$$

وبالمكاملة بالنسبة لـ y علماً أنَّ x ثابت نجد أنَّ:

$$\frac{u}{y} = x^2 y + \psi(y) + \varphi(x) \;\Rightarrow\; \boxed{u(x,y) = x^2y^2 + y\left[\varphi(x) + \psi(y)\right]}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة .

ولإيجاد الحل الخاص المطلوب نطبق شروط البدء على الحل العام بالشكل:

تطبيق الشرط الابتدائي الأول:

$$x^4 = u\big|_{y=x} = x^4 + x\left[\varphi(x)+\psi(x)\right] \Rightarrow \quad \varphi(x)+\psi(x)=0 \quad ; \; x \neq 0 \; \cdots\cdots\cdots(*)$$

نشتق الحل العام بالنسبة لـ y تمهيداً لتطبيق الشرط الابتدائي الثاني:

$$u_y = 2x^2 y + \left[\varphi(x)+\psi(y)\right] + y\,\psi'(y)$$

تطبيق الشرط الابتدائي الثاني:

$$2x^3 = u_y\big|_{y=x} = 2x^3 + \left[\varphi(x)+\psi(x)\right] + x\,\psi'(x) \;\Rightarrow$$

$$\left[\varphi(x)+\psi(x)\right] + x\,\psi'(x) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots(**)$$

وبتعويض العلاقة $(*)$ في العلاقة $(**)$ نجد أنَّ:

$$0 + x\,\psi'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \psi'(x)=0 \;\Rightarrow\; \boxed{\psi(x)=0} \;\Rightarrow\; \boxed{\psi(y)=0}$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$\varphi(x)+0=0 \;\Rightarrow\; \boxed{\varphi(x)=0}$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في عبارة الحل العام نجد أنَّ:

$$\boxed{u(x,y)=x^2y^2}$$

❻ (الفصل الثاني للعام 2008 – 2009) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية الآتية :

$$\left(x^2+4y\right)u_{xy} - 2xu_y = \left(x^2+4y\right)^2$$

ثم أوجد الحل الخاص والموافق للشروط : $u\big|_{y=x} = x^4+2x^3 \quad , \; u_y\big|_{y=x} = x^3+5x^2+4x$

الحل : من الواضح أن المعادلة المعطاة مكتوبة بالشكل النموذجي ، ولحلها نكتبها بالشكل التالي :

$$u_{xy} - \frac{2x}{\left(x^2+4y\right)}u_y = \left(x^2+4y\right)$$

بفرض أن $u_y = v$ نجد أن المعادلة الأخيرة تصبح بالشكل :

$$v_x - \frac{2x}{\left(x^2+4y\right)}v = \left(x^2+4y\right)$$

بتثبيت y نحصل على معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى بالدالة v والمتحول المستقل x ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu = e^{\int -\frac{2x}{\left(x^2+4y\right)}dx} = e^{\ln\left(\frac{1}{x^2+4y}\right)} = \frac{1}{\left(x^2+4y\right)}$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{v}{\left(x^2+4y\right)}\right]=1$$

بتثبيت y والمكاملة بالنسبة لـ x نجد أن:

$$\frac{v}{\left(x^2+4y\right)}=\left(x+\psi(y)\right) \quad \Rightarrow v=x\left(x^2+4y\right)+\left(x^2+4y\right)\psi(y)$$

ولدينا $u_y=v$ وبالتالي تصبح المعادلة الأخيرة بالشكل :

$$u_y=\left(x^3+4xy\right)+\left(x^2+4y\right)\psi(y)$$

بتثبيت x والمكاملة بالنسبة لـ y نجد أن :

$$\boxed{u(x,y)=\left(x^3y+2xy^2\right)+\int_0^y\left(x^2+4\eta\right)\psi(\eta)d\eta+\varphi(x)}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة.

ولإيجاد الحل الخاص المطلوب نطبق شروط البدء على الحل العام بالشكل:

تطبيق الشرط الابتدائي الأول:

$$x^4+2x^3=u\big|_{y=x}=\left(x^4+2x^3\right)+\int_0^x\left(x^2+4\eta\right)\psi(\eta)d\eta+\varphi(x) \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^x\left(x^2+4\eta\right)\psi(\eta)d\eta+\varphi(x)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

ولنشتق الحل العام بالنسبة لـ y تمهيداً لتطبيق الشرط الابتدائي الثاني:

$$u_y=\left(x^3+4xy\right)+\left(x^2+4y\right)\psi(y)$$

تطبيق الشرط الابتدائي الثاني:

$$x^3+5x^2+4x=u_y\big|_{y=x}=x^3+4x^2+\left(x^2+4x\right)\psi(x) \Rightarrow$$

$$x^3+5x^2+4x-x^3-4x^2=\left(x^2+4x\right)\psi(x) \Rightarrow$$

$$\left(x^2+4x\right)=\left(x^2+4x\right)\psi(x) \Rightarrow \boxed{\psi(x)=1} \Rightarrow \psi(\eta)=1$$

نعوض في العلاقة (1) فنجد أن:

$$\int_0^x\left(x^2+4\eta\right)d\eta+\varphi(x)=0 \Rightarrow \left(x^2\eta+2\eta^2\right)_0^x+\varphi(x)=0 \Rightarrow x^3+2x^2+\varphi(x)=0 \Rightarrow$$

$$\varphi(x)=-x^3-2x^2$$

وبالاستفادة مما سبق وتعويض $\varphi(x)=-x^3-2x^2\ ,\ \psi(\eta)=1$ في الحل العام نجد أن:

$$u(x,y)=\left(x^3y+2xy^2\right)+\left(x^2\eta+2\eta^2\right)_0^y-x^3-2x^2=$$

$$=\left(x^3y+2xy^2\right)+x^2y+2y^2-x^3-2x^2\ \Rightarrow$$

$$\boxed{u(x,y)=x^3y+2xy^2+x^2y+2y^2-x^3-2x^2}$$

وهو الحل الخاص المطلوب .

❼ **(الفصل الأول للعام 2013 – 2014)** أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية الآتية :

$$xyu_{xy}+xu_x-yu_y-u=2y$$

ثم أوجد الحل الخاص والمحقق للشروط الابتدائية :

$$u\Big|_{y=\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{x}\quad ,\quad u_y\Big|_{y=\frac{1}{x}}=x-1$$

الحل : إن المعادلة المعطاة مكتوبة بالشكل النموذجي ولحلها نكتبها بالشكل :

$$x\left(yu_{xy}+u_x\right)-\left(yu_y+u\right)=2y\ \Rightarrow x\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(yu_y+u\right)\right)-\left(yu_y+u\right)=2y$$

لنفرض أن $yu_y+u=v$ عندئذٍ تصبح المعادلة الأخيرة بالشكل :

$$x\left(\frac{\partial}{\partial x}v\right)-v=2y\quad\Rightarrow\ xv_x-v=2y$$

بتثبيت y نحصل على معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى بالدالة v والمتحول المستقل x وتكتب بالشكل :

$$v_x-\frac{1}{x}v=2\frac{y}{x}$$

ولحلها نوجد عامل التكميل :

$$\mu=e^{\int\frac{-1}{x}dx}=e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{x}$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{v}{x}\right]=2\frac{y}{x^2}$$

وبتثبيت y والمكاملة بالنسبة لـ x نجد أن :

$$\frac{v}{x}=-2\frac{y}{x}+\psi_1(y)\ \Rightarrow\quad v=-2y+x\,\psi_1(y)$$

ولدينا : $v=yu_y+u$ بالتعويض في المعادلة الأخيرة نجد أن :

$$yu_y + u = -2y + x\,\psi_1(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}[u.y] = -2y + x\,\psi_1(y)$$

بتثبيت x والمكاملة بالنسبة لـ y نجد أن :

$$u.y = -y^2 + x\,\psi(y) + \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{u(x,y) = -y + \frac{1}{y}\big(x\,\psi(y) + \varphi(x)\big)}$$

للحصول على الحل الخاص المطلوب نطبق الشروط الابتدائية على الحل العام بالشكل :

بتطبيق الشرط الابتدائي الأول نجد أن :

$$1 - \frac{1}{x} = u\big|_{y=\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x} + x\left(x\,\psi\left(\frac{1}{x}\right) + \varphi(x)\right) \quad \Rightarrow x\,\psi\left(\frac{1}{x}\right) + \varphi(x) = \frac{1}{x} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

ولنشتق الحل العام بالنسبة لـ y تمهيداً لتطبيق الشرط الابتدائي الثاني:

$$u_y = -1 - \frac{1}{y^2}\left[x\,\psi(y) + \varphi(x)\right] + \frac{x}{y}\psi'(y)$$

بتطبيق الشرط الابتدائي الثاني نجد أن :

$$x - 1 = u_y\big|_{y=\frac{1}{x}} = -1 - x^2\left[x\,\psi\left(\frac{1}{x}\right) + \varphi(x)\right] + x^2\psi'\left(\frac{1}{x}\right)$$

وبالاستفادة من (1) نجد أن العلاقة الأخيرة تصبح بالشكل:

$$x - 1 = -1 - x^2\frac{1}{x} + x^2\psi'\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow x - 1 = -1 - x + x^2\psi'\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow x^2\psi'\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \Rightarrow$$

$$\psi'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x} \quad \Rightarrow \psi'(t) = 2t \Rightarrow \psi(t) = t^2 \Rightarrow \psi\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

وبالتعويض في المعادلة (1) نجد أن:

$$x\left(\frac{1}{x^2}\right) + \varphi(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = 0$$

إذاً أصبح لدينا : $\varphi(x) = 0$ و $\psi(y) = y^2$ ، وبتعويض ذلك في الحل العام نجد أن الحل الخاص المطلوب هو:

$$u(x,y) = -y + \frac{1}{y}\left(x\,y^2 + 0\right) = -y + xy \quad \Rightarrow \quad \boxed{u(x,y) = y\,(x-1)}$$

❽ **(الفصل الثاني للعام 2003 – 2004)** أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية :

$$u_{xy} - \frac{2x}{x^2 + 2y}u_y = 0$$

والمحقق للشروط الابتدائية : $u\big|_{y=0} = x^2 \quad , \quad u\big|_{x=0} = y^2$

الحل : إن المعادلة المعطاة مكتوبة بالشكل النموذجي ، ولحلها نفرض $u_y = v$ فنجد أن :

$$v_x - \frac{2x}{x^2+2y} v = 0$$

بتثبيت y نحصل على معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى بالدالة v والمتحول المستقل x ولحلها نوجد عامل التكميل :

$$\mu = e^{\int -\frac{2x}{x^2+2y}dx} = e^{\ln\left(\frac{1}{x^2+2y}\right)} = \frac{1}{x^2+2y}$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v}{x^2+2y}\right) = 0$$

بتثبيت y والمكاملة بالنسبة لـ x نجد :

$$\frac{v}{x^2+2y} = \psi(y) \Rightarrow v = \left(x^2+2y\right)\psi(y)$$

ولدينا $v = u_y$ وبالتالي تصبح المعادلة الأخيرة بالشكل : $u_y = \left(x^2+2y\right)\psi(y)$

بتثبيت x والمكاملة بالنسبة لـ y نجد :

$$u(x,y) = \int_0^y \left(x^2+2\eta\right)\psi(\eta)d\eta + \varphi(x)$$

ولإيجاد الحل الخاص المطلوب نطبق الشروط الابتدائية على الحل العام:

بتطبيق الشرط الابتدائي الأول نجد :

$$x^2 = u\big|_{y=0} = \varphi(x) \Rightarrow \boxed{\varphi(x) = x^2} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

بتطبيق الشرط الابتدائي الثاني نجد :

$$y^2 = u\big|_{x=0} = \int_0^y 2\eta\psi(\eta)d\eta + \varphi(0) \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

بالاستفادة من العلاقة (1) نجد أن : $\varphi(0) = 0$ وبالتعويض في العلاقة (2) نجد أن :

$$y^2 = \int_0^y 2\eta\psi(\eta)d\eta$$

وباشتقاق طرفي العلاقة الأخيرة بالنسبة لـ y نجد أن :

$$2y = 2y\,\psi(y) \Rightarrow \boxed{\psi(y) = 1} \Rightarrow \psi(\eta) = 1$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في الحل العام نجد أن :

$$u(x,y)=\int_0^y\left(x^2+2\eta\right)d\eta+x^2=\left[x^2\eta+\eta^2\right]_0^y+x^2=\left(x^2y+y^2\right)+x^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{u(x,y)=x^2(y+1)+y^2}$$

❾ (الفصل الثاني للعام 2012 – 2013) أوجد الحل العام للمعادلة :

$$xu_{xx}+(x+y)u_{xy}+yu_{yy}=0$$

ثم أوجد الحل الخاص المحقق للشروط الابتدائية:

$$u\big|_{x=1}=y-1 \quad , \quad u_x\big|_{x=1}=(1-y)^2-1$$

الحل: لدينا من المعادلة أنَّ: $A=x \quad , \quad 2B=(x+y) \Rightarrow B=\dfrac{(x+y)}{2} \quad , \quad C=y$ وبالتالي فإنَّ:

$$B^2-AC=\frac{(x+y)^2}{4}-xy=\frac{(x-y)^2}{4}>0$$

وبالتالي فالمعادلة المعطاة من النمط الزائدي، ولحلها نوجد المعادلة المميزة لها:

$$Ady^2-2Bdxdy+Cdx^2=0 \Rightarrow xdy^2-(x+y)dxdy+ydx^2=0 \Rightarrow$$

$$xdy^2-xdxdy-ydxdy+ydx^2=0 \Rightarrow xdy(dy-dx)-ydx(dy-dx)=0 \Rightarrow$$

$$(dy-dx)(xdy-ydx)=0 \Rightarrow \begin{cases} dy-dx=0 \Rightarrow y-x=c_1 \\ xdy-ydx=0 \Rightarrow \dfrac{y}{x}=c_2 \end{cases}$$

وبأخذ $\xi=y-x \ , \ \eta=\dfrac{y}{x}$ ، ثم بحساب المشتقات نجد أن:

$$\xi_x=-1 \ , \ \xi_{xx}=0 \ , \ \xi_y=1 \ , \ \xi_{yy}=0 \ , \ \xi_{xy}=0$$

$$\eta_x=-\frac{y}{x^2} \ , \ \eta_{xx}=\frac{2y}{x^3} \ , \ \eta_y=\frac{1}{x} \ , \ \eta_{yy}=0 \ , \ \eta_{xy}=-\frac{1}{x^2}$$

ولدينا:

$$u_{xx}=\xi_x^2u_{\xi\xi}+\eta_x^2u_{\eta\eta}+2\xi_x\eta_xu_{\xi\eta}+\xi_{xx}u_\xi+\eta_{xx}u_\eta \Rightarrow \boxed{u_{xx}=u_{\xi\xi}+\frac{y^2}{x^4}u_{\eta\eta}+2\frac{y}{x^2}u_{\xi\eta}+\frac{2y}{x^3}u_\eta}$$

$$u_{xy}=\xi_x\xi_yu_{\xi\xi}+\eta_x\eta_yu_{\eta\eta}+\left(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x\right)u_{\xi\eta}+\xi_{xy}u_\xi+\eta_{xy}u_\eta$$

$$\boxed{u_{xy}=-u_{\xi\xi}-\frac{y}{x^3}u_{\eta\eta}-\left(\frac{1}{x}+\frac{y}{x^2}\right)u_{\xi\eta}-\frac{1}{x^2}u_\eta}$$

$$u_{yy}=\xi_y^2u_{\xi\xi}+\eta_y^2u_{\eta\eta}+2\xi_y\eta_yu_{\xi\eta}+\xi_{yy}u_\xi+\eta_{yy}u_\eta \Rightarrow \boxed{u_{yy}=u_{\xi\xi}+\frac{1}{x^2}u_{\eta\eta}+\frac{2}{x}u_{\xi\eta}}$$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية نجد أن:

أمثال $u_{\xi\xi}$ هي : $x-(x+y)+y=x-x-y+y=0$

أمثال $u_{\eta\eta}$ هي:

$$x\left(\frac{y^2}{x^4}\right)+(x+y)\left(-\frac{y}{x^3}\right)+y\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{y^2}{x^3}-\frac{y}{x^2}-\frac{y^2}{x^3}+\frac{y}{x^2}=0$$

أمثال $u_{\xi\eta}$ هي:

$$x\left(2\frac{y}{x^2}\right)+(x+y)\left(-\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2}\right)+y\left(\frac{2}{x}\right)=2\frac{y}{x}-1-\frac{y}{x}-\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}+2\frac{y}{x}=-\frac{(y-x)^2}{x^2}$$

أمثال u_η هي:

$$x\left(2\frac{y}{x^3}\right)+(x+y)\left(-\frac{1}{x^2}\right)+y(0)=2\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2}=\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{(y-x)}{x^2}$$

وبعد التعويض والاختصار نجد أن :

$$-\frac{(y-x)^2}{x^2}u_{\xi\eta}+\frac{(y-x)}{x^2}u_\eta=0 \Rightarrow u_{\xi\eta}-\frac{1}{(y-x)}u_\eta=0$$

وبما أن : $y-x=\xi$ فإن المعادلة الأخيرة تكتب بالشكل: $\boxed{u_{\xi\eta}-\frac{1}{\xi}u_\eta=0}$

وهي المعادلة المطلوبة بالشكل النموذجي، ولنوجد حلها:

$$u_{\xi\eta}-\frac{1}{\xi}u_\eta=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\eta}\left[u_\xi-\frac{1}{\xi}u\right]=0$$

بتثبيت ξ والمكاملة بالنسبة لـ η نجد أنَّ: $u_\xi-\frac{1}{\xi}u=\varphi_1(\xi)$

وبتثبيت η نحصل على معادلة تفاضلية بالدالة u والمتحول المستقل ξ ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu=e^{\int\left(-\frac{1}{\xi}\right)d\xi}=e^{\ln\left(\frac{1}{\xi}\right)}=\frac{1}{\xi}$$

وبضرب المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{1}{\xi}u\right]=\frac{1}{\xi}\varphi_1(\xi)=\varphi_2(\xi) \Rightarrow \frac{1}{\xi}u=\int\varphi_2(\xi)d\xi+\psi(\eta)=\varphi(\xi)+\psi(\eta) \Rightarrow$$

$$\boxed{u(\xi,\eta)=\xi\left[\varphi(\xi)+\psi(\eta)\right]}$$

وبالعودة للمتحولات القديمة $\xi = y - x \ , \ \eta = \frac{y}{x}$ نجد أن الحل العام للمعادلة المطلوبة:

$$u(x,y) = (y-x)\left[\varphi(y-x) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

ولإيجاد الحل الخاص المطلوب نطبق الشروط الابتدائية على الحل العام بالشكل:

نطبق الشرط الابتدائي الأول:

$$y-1 = u|_{x=1} = (y-1)\left[\varphi(y-1) + \psi(y)\right] \Rightarrow \varphi(y-1) + \psi(y) = 1 \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

نشتق الحل العام بالنسبة لـ x تمهيداً لتطبيق الشرط الابتدائي الثاني:

$$u_x = -\left[\varphi(y-x) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)\right] + (y-x)\left[-\varphi'(y-x) - \frac{y}{x^2}\psi'\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

وبتطبيق الشرط الابتدائي الثاني نجد أنَّ:

$$(1-y)^2 - 1 = u_x|_{x=1} = -\left[\varphi(y-1) + \psi(y)\right] + (y-1)\left[-\varphi'(y-1) - y\,\psi'(y)\right]$$

وبالاستفادة من العلاقة $(*)$ نجد أنَّ العلاقة الأخيرة تكتب بالشكل:

$$(1-y)^2 - 1 = -1 + (y-1)\left[-\varphi'(y-1) - y\,\psi'(y)\right] \Rightarrow$$

$$(1-y)^2 = (1-y)\left[\varphi'(y-1) + y\,\psi'(y)\right] \Rightarrow$$

$$\varphi'(y-1) + y\,\psi'(y) = (1-y) \quad \cdots\cdots\cdots(**)$$

وباشتقاق العلاقة $(*)$ بالنسبة لـ y نجد أنَّ:

$$\varphi'(y-1) + \psi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi'(y-1) = -\psi'(y) \quad \cdots\cdots\cdots(*')$$

وبتعويض العلاقة $(*')$ في العلاقة $(**)$ نجد أنَّ:

$$-\psi'(y) + y\,\psi'(y) = (1-y) \Rightarrow -(1-y)\psi'(y) = (1-y) \Rightarrow \psi'(y) = -1 \Rightarrow \boxed{\psi(y) = -y}$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$\varphi(y-1) - y = 1 \Rightarrow \varphi(y-1) = y+1 = (y-1)+2 \Rightarrow \boxed{\varphi(t) = t+2}$$

بالاستفادة مما سبق والتعويض في الحل العام نجد أنَّ الحل الخاص المطلوب هو:

$$\boxed{u(x,y) = (y-x)\left[y - x + 2 - \frac{y}{x}\right]}$$

ملاحظة هامة: أعد حل المعادلة السابقة في حال كانت الشروط الابتدائية معطاة بالشكل:

$$u|_{y=\frac{1}{x}} = x^3 \ , \ u_x|_{y=\frac{1}{x}} = 2x^2$$

وقد جاء هذا التمرين في دورة الفصل الأول للعام 2004 – 2005، والجواب هو: $u(x,y) = \frac{x^2}{y} \ ; \ y > 0$.

⑩**(الدورة الثالثة للعام 2013 – 2014)** أوجد حل المعادلة:

$$yu_{xx} + x(2y-1)u_{xy} - 2x^2u_{yy} - \frac{y}{x}u_x = 0$$

في المنطقة $x > 0$ والمحقق للشروط الابتدائية التالية:

$$u\big|_{y=0} = x^2 \qquad , \qquad u_y\big|_{y=0} = 1$$

علماً أنَّ الشكل النموذجي لهذه المعادلة هو:

$$(1+4\xi+4\eta)u_{\xi\eta} + 2u_\eta = 0 \ ; \ \xi = y - x^2 \quad , \ \eta = y^2 + x^2$$

الحل: إن الشكل النموذجي للمعادلة المعطاة يكتب بالشكل:

$$(1+4\xi+4\eta)u_{\xi\eta} + 2u_\eta = 0 \ \Rightarrow \ u_{\xi\eta} + \frac{2}{(1+4\xi+4\eta)}u_\eta = 0$$

لنفرض أنَّ $u_\eta = v \ \Rightarrow u_{\xi\eta} = v_\xi$ وبالتالي تصبح المعادلة الأخيرة بالشكل:

$$v_\xi + \frac{2}{(1+4\xi+4\eta)}v = 0$$

نثبت η فنحصل على معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى بالدالة v والمتحول المستقل ξ ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu = e^{\int\frac{2}{(1+4\xi+4\eta)}d\xi} = e^{\frac{1}{2}\int\frac{4}{(1+4\xi+4\eta)}d\xi} = e^{\frac{1}{2}\ln(1+4\xi+4\eta)} = e^{\ln\left(\sqrt{1+4\xi+4\eta}\right)} = \sqrt{1+4\xi+4\eta}$$

بضرب طرفي المعادلة السابقة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(v\sqrt{1+4\xi+4\eta}\right) = 0$$

بتثبيت η والمكاملة بالنسبة لـ ξ نجد أنَّ:

$$v\sqrt{1+4\xi+4\eta} = \psi(\eta)$$

ومنه نجد أنَّ: $$v = \frac{1}{\sqrt{1+4\xi+4\eta}}\psi(\eta)$$

وبما أنَّ $v = u_\eta$ فإن المعادلة الأخيرة تكتب بالشكل:

$$u_\eta = \frac{1}{\sqrt{1+4\xi+4\eta}}\psi(\eta)$$

بتثبيت ξ والمكاملة بالنسبة لـ η نجد أنَّ:

$$u(\xi,\eta) = \int_0^\eta \frac{1}{\sqrt{1+4\xi+4z}}\psi(z)dz + \varphi(\xi)$$

وبما أنه لدينا من نص السؤال أنَّ: $\xi = y - x^2 \ , \ \eta = y^2 + x^2$، فإننا بالتعويض في العلاقة الأخيرة نحصل على

صيغة الحل العام:

$$u(x,y)=\int_0^{y^2+x^2}\frac{1}{\sqrt{1+4\left(y-x^2\right)+4z}}\psi(z)dz+\varphi\left(y-x^2\right)$$

ولإيجاد الحل الخاص المطلوب نطبق الشروط الابتدائية على الحل العام:

تطبيق الشرط الابتدائي الأول:

$$x^2=u\big|_{y=0}=\int_0^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1-4x^2+4z}}\psi(z)dz+\varphi\left(-x^2\right)\quad\Rightarrow$$

$$x^2=\int_0^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1-4x^2+4z}}\psi(z)dz+\varphi\left(-x^2\right)\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

تطبيق الشرط الابتدائي الثاني: لنحسب أولاً u_y:

$$u_y=\left[\frac{1}{\sqrt{1+4\left(y-x^2\right)+4\left(y^2+x^2\right)}}\psi\left(y^2+x^2\right)\right]2y-0+$$

$$+\int_0^{y^2+x^2}\frac{-2}{\left(1+4\left(y-x^2\right)+4z\right)^{\frac{3}{2}}}\psi(z)dz+\varphi'\left(y-x^2\right)$$

وبالتالي فإنَّ:

$$1=u_y\big|_{y=0}=-2\int_0^{x^2}\frac{1}{\left(1-4x^2+4z\right)^{\frac{3}{2}}}\psi(z)dz+\varphi'\left(-x^2\right)\quad\Rightarrow$$

$$1=-2\int_0^{x^2}\frac{1}{\left(1-4x^2+4z\right)^{\frac{3}{2}}}\psi(z)dz+\varphi'\left(-x^2\right)\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

لنفرض أن $x^2=t$ ولنعوض في (1) فنجد أنَّ:

$$t=\int_0^{t}\frac{1}{\sqrt{1-4t+4z}}\psi(z)dz+\varphi(-t)\quad\cdots\cdots\cdots(*)$$

ولنشتق العلاقة $(*)$ بالنسبة لـ t فنجد أنَّ:

$$1=\frac{1}{\sqrt{1-4t+4t}}\psi(t)-0+\int_0^{t}\frac{2}{\left(1-4t+4z\right)^{\frac{3}{2}}}\psi(z)dz-\varphi'(-t)\quad\Rightarrow$$

$$1=\psi(t)+2\int_0^{t}\frac{1}{\left(1-4t+4z\right)^{\frac{3}{2}}}\psi(z)dz-\varphi'(-t)\quad\cdots\cdots\cdots(1')$$

وبتعويض $x^2 = t$ في العلاقة (2) نجد أنَّ:

$$1 = -2\int_0^t \frac{1}{(1-4t+4z)^{\frac{3}{2}}}\psi(z)dz + \varphi'(-t) \quad \cdots\cdots\cdots (2')$$

وبجمع العلاقتين $(1')$ و $(2')$ نجد أنَّ:

$$\boxed{\psi(t) = 2} \Rightarrow \psi(z) = 2$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$t = \int_0^t \frac{2}{\sqrt{1-4t+4z}}dz + \varphi(-t) \Rightarrow t = \left[\sqrt{1-4t+4z}\right]_0^t + \varphi(-t) \Rightarrow$$

$$t = \left[1 - \sqrt{1-4t}\right] + \varphi(-t) \Rightarrow \varphi(-t) = t - 1 + \sqrt{1-4t}$$

ولنفرض أن $-t = k$ في العلاقة الأخيرة فنجد أن:

$$\boxed{\varphi(k) = -k - 1 + \sqrt{1+4k}}$$

وبما أننا وجدنا أن:

$$\psi(t) = 2 \; , \; \varphi(t) = -t - 1 + \sqrt{1+4t}$$

فإنَّ:

$$\psi(z) = 2 \; , \; \varphi(y - x^2) = -(y - x^2) - 1 + \sqrt{1 + 4(y - x^2)}$$

$$u(x,y) = \int_0^{y^2+x^2} \frac{2}{\sqrt{1+4(y-x^2)+4z}}dz - (y - x^2) - 1 + \sqrt{1+4(y-x^2)}$$

$$= \left[\sqrt{1+4(y-x^2)+4z}\right]_0^{y^2+x^2} - (y-x^2) - 1 + \sqrt{1+4(y-x^2)}$$

$$= \left[\sqrt{1+4(y-x^2)+4(y^2+x^2)} - \sqrt{1+4(y-x^2)}\right] - (y-x^2) - 1 + \sqrt{1+4(y-x^2)}$$

$$= \left[\sqrt{1+4y+4y^2} - \sqrt{1+4(y-x^2)}\right] - (y-x^2) - 1 + \sqrt{1+4(y-x^2)}$$

$$\boxed{u(x,y) = \sqrt{1+4y+4y^2} - (y-x^2) - 1}$$

وهو الحل الخاص المطلوب.(أي شو هالسؤااااال شغل ترسيب بالمادة والله).

❶❶ **(الفصل الأول للعام 2015 – 2016)** أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية الآتية:

$$y\,u_{xx} + (x+y)u_{xy} + xu_{yy} = -(y-x)^2$$

ثم أوجد الحل الخاص والمحقق للشروط الابتدائية:

$$u\big|_{x=0} = y^4 \ , \ u_x\big|_{x=0} = 2y^3$$

الحل:

لدينا من المعادلة أنَّ: $C = x \ , \ B = \dfrac{(x+y)}{2} \Rightarrow 2B = (x+y) \ , \ A = y$ وبالتالي فإنَّ:

$$B^2 - AC = \frac{(x+y)^2}{4} - xy = \frac{(x-y)^2}{4} > 0$$

وبالتالي فالمعادلة المعطاة من النمط الزائدي، ولحلها نوجد المعادلة المميزة لها:

$$Ady^2 - 2Bdxdy + Cdx^2 = 0 \ \Rightarrow \ ydy^2 - (x+y)dxdy + xdx^2 = 0 \ \Rightarrow$$

$$ydy^2 - xdxdy - ydxdy + xdx^2 = 0 \ \Rightarrow ydy\,(dy - dx) - xdx\,(dy - dx) = 0 \Rightarrow$$

$$(dy - dx)(ydy - xdx) = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} dy - dx = 0 \Rightarrow y - x = c_1 \\ ydy - xdx = 0 \Rightarrow y^2 - x^2 = c_2 \end{cases}$$

وبأخذ $\eta = y^2 - x^2 \ , \ \xi = y - x$ ، ثم بحساب المشتقات نجد أن:

$$\xi_x = -1 \ , \ \xi_{xx} = 0 \ , \ \xi_y = 1 \ , \ \xi_{yy} = 0 \ , \ \xi_{xy} = 0$$

$$\eta_x = -2x \ , \ \eta_{xx} = -2 \ , \ \eta_y = 2y \ , \ \eta_{yy} = 2 \ , \ \eta_{xy} = 0$$

ولدينا:

$$u_{xx} = \xi_x^2 u_{\xi\xi} + \eta_x^2 u_{\eta\eta} + 2\xi_x\eta_x u_{\xi\eta} + \xi_{xx}u_\xi + \eta_{xx}u_\eta \Rightarrow \boxed{u_{xx} = u_{\xi\xi} + 4x^2u_{\eta\eta} + 4x\,u_{\xi\eta} - 2u_\eta}$$

$$u_{xy} = \xi_x\xi_y u_{\xi\xi} + \eta_x\eta_y u_{\eta\eta} + (\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x)u_{\xi\eta} + \xi_{xy}u_\xi + \eta_{xy}u_\eta$$

$$\boxed{u_{xy} = -u_{\xi\xi} - 4xy\,u_{\eta\eta} - 2(x+y)u_{\xi\eta}}$$

$$u_{yy} = \xi_y^2 u_{\xi\xi} + \eta_y^2 u_{\eta\eta} + 2\xi_y\eta_y u_{\xi\eta} + \xi_{yy}u_\xi + \eta_{yy}u_\eta \Rightarrow \boxed{u_{yy} = u_{\xi\xi} + 4y^2u_{\eta\eta} + 4y\,u_{\xi\eta} + 2u_\eta}$$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية نجد أن:

أمثال $u_{\xi\xi}$ هي :

$$y - (x+y) + x = y - x - y + x = 0$$

أمثال $u_{\eta\eta}$ هي:

$$y\left(4x^2\right) + (x+y)(-4xy) + x\left(4y^2\right) = 4x^2y - 4x^2y - 4xy^2 + 4xy^2 = 0$$

أمثال $u_{\xi\eta}$ هي:

$$y(4x)+(x+y)\left[-2(x+y)\right]+x(4y)=4xy-2(x+y)^2+4xy=$$
$$=-2(x-y)^2=-2(y-x)^2$$

أمثال u_{η} هي:

$$y(-2)+(x+y)(0)+x(2)=-2(y-x)$$

وبعد التعويض والاختصار نجد أن:

$$-2(y-x)^2u_{\xi\eta}-2(y-x)u_{\eta}=-(y-x)^2 \Rightarrow u_{\xi\eta}+\frac{1}{(y-x)}u_{\eta}=\frac{1}{2}$$

وبما أن : $y-x=\xi$ فإن المعادلة الأخيرة تكتب بالشكل:

$$\boxed{u_{\xi\eta}+\frac{1}{\xi}u_{\eta}=\frac{1}{2}}$$

وهي المعادلة المطلوبة بالشكل النموذجي، ولنوجد حلها:

$$u_{\xi\eta}+\frac{1}{\xi}u_{\eta}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\eta}\left[u_{\xi}+\frac{1}{\xi}u\right]=\frac{1}{2}$$

بتثبيت ξ والمكاملة بالنسبة لـ η نجد أنَّ:

$$u_{\xi}+\frac{1}{\xi}u=\frac{1}{2}\eta+\varphi_1(\xi)$$

وبتثبيت η نحصل على معادلة تفاضلية بالدالة u والمتحول المستقل ξ ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu=e^{\int\left(\frac{1}{\xi}\right)d\xi}=e^{\ln(\xi)}=\xi$$

وبضرب المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}[\xi u]=\frac{1}{2}\xi\eta+\xi\varphi_1(\xi)=\frac{1}{2}\xi\eta+\varphi_2(\xi) \Rightarrow \xi u=\frac{1}{4}\xi^2\eta+\int\varphi_2(\xi)d\xi+\psi(\eta) \Rightarrow$$

$$\xi u=\frac{1}{4}\xi^2\eta+\varphi(\xi)+\psi(\eta) \Rightarrow$$

$$\boxed{u(\xi,\eta)=\frac{1}{4}\xi\eta+\frac{1}{\xi}\left[\varphi(\xi)+\psi(\eta)\right]}$$

وبالعودة للمتحولات القديمة $\xi=y-x \ , \ \eta=y^2-x^2$ نجد أن الحل العام للمعادلة المطلوبة:

$$u(x,y)=\frac{1}{4}(y-x)\left(y^2-x^2\right)+\frac{1}{(y-x)}\left[\varphi(y-x)+\psi\left(y^2-x^2\right)\right]$$
$$=\frac{1}{4}\left(y^3-x^2y-xy^2+x^3\right)+\frac{1}{(y-x)}\left[\varphi(y-x)+\psi\left(y^2-x^2\right)\right]$$

ولإيجاد الحل الخاص المطلوب نطبق الشروط الابتدائية على الحل العام بالشكل:

نطبق الشرط الابتدائي الأول:

$$y^4 = u\big|_{x=0} = \frac{1}{4}y^3 + \frac{1}{y}\left[\varphi(y) + \psi\left(y^2\right)\right] \Rightarrow \varphi(y) + \psi\left(y^2\right) = y^5 - \frac{1}{4}y^4 \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

نشتق الحل العام بالنسبة لـ x تمهيداً لتطبيق الشرط الابتدائي الثاني:

$$u_x = \frac{1}{4}\left(-2xy - y^2 + 3x^2\right) + \frac{1}{(y-x)^2}\left[\varphi(y-x) + \psi\left(y^2 - x^2\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{(y-x)}\left[-\varphi'(y-x) - 2x\,\psi'\left(y^2 - x^2\right)\right]$$

وبتطبيق الشرط الابتدائي الثاني نجد أنَّ:

$$2y^3 = u_x\big|_{x=0} = -\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{y^2}\left[\varphi(y) + \psi\left(y^2\right)\right] - \frac{1}{y}\varphi'(y) \Rightarrow$$

$$2y^3 = -\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{y^2}\left[\varphi(y) + \psi\left(y^2\right)\right] - \frac{1}{y}\varphi'(y) \quad \cdots\cdots\cdots(**)$$

وبالاستفادة من العلاقة $(*)$ نجد أنَّ العلاقة $(**)$ تكتب بالشكل:

$$2y^3 = -\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{y^2}\left[y^5 - \frac{1}{4}y^4\right] - \frac{1}{y}\varphi'(y) \Rightarrow$$

$$2y^3 = -\frac{1}{4}y^2 + y^3 - \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{y}\varphi'(y) \Rightarrow \frac{1}{y}\varphi'(y) = -\frac{1}{2}y^2 - y^3 \Rightarrow$$

$$\varphi'(y) = -\frac{1}{2}y^3 - y^4 \Rightarrow \boxed{\varphi(y) = -\frac{1}{8}y^4 - \frac{1}{5}y^5}$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$-\frac{1}{8}y^4 - \frac{1}{5}y^5 + \psi\left(y^2\right) = y^5 - \frac{1}{4}y^4 \Rightarrow \boxed{\psi\left(y^2\right) = \frac{6}{5}y^5 - \frac{1}{8}y^4}$$

ومنه فإنَّ:

$$\boxed{\varphi(y) = -\frac{1}{8}y^4 - \frac{1}{5}y^5} \Rightarrow \varphi(y-x) = -\frac{1}{8}(y-x)^4\left(1 + \frac{8}{5}(y-x)\right)$$

$$\boxed{\psi\left(y^2\right) = \frac{6}{5}\left(y^2\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}\left(y^2\right)^2} \quad \psi\left(y^2 - x^2\right) = -\frac{1}{8}\left(y^2 - x^2\right)^2\left[1 - \frac{48}{5}\sqrt{y^2 - x^2}\right]$$

$$u(x,y) = \frac{1}{4}(y-x)\left(y^2 - x^2\right) + \frac{1}{(y-x)}\left[\varphi(y-x) + \psi\left(y^2 - x^2\right)\right] =$$

$$=\frac{1}{4}(y-x)\left(y^2-x^2\right)-\frac{1}{8}(y-x)^3\left(1+\frac{8}{5}(y-x)\right)-\frac{1}{8}(y-x)(y+x)^2\left[1-\frac{48}{5}\sqrt{y^2-x^2}\right]$$

$$(y-x)\left[\frac{1}{4}\left(y^2-x^2\right)-\frac{1}{8}(y-x)^2\left(1+\frac{8}{5}(y-x)\right)-\frac{1}{8}(y+x)^2\left[1-\frac{48}{5}\sqrt{y^2-x^2}\right]\right]$$

$$(y-x)\left[\frac{1}{4}\left(y^2-x^2\right)-\frac{1}{8}(y-x)^2-\frac{1}{5}(y-x)^3-\frac{1}{8}(y+x)^2+\frac{6}{5}(y+x)^2\sqrt{y^2-x^2}\right]$$

$$(y-x)\left[\frac{1}{4}\left(y^2-x^2\right)-\frac{1}{4}\left[y^2+x^2\right]-\frac{1}{5}(y-x)^3+\frac{6}{5}(y+x)^2\sqrt{y^2-x^2}\right]$$

$$(y-x)\left[-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}(y-x)^3+\frac{6}{5}(y+x)^2\sqrt{y^2-x^2}\right]$$

وبالتالي فإنَّ الحل العام هو:

$$\boxed{u(x,y)=(y-x)\left[-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}(y-x)^3+\frac{6}{5}(y+x)^2\sqrt{y^2-x^2}\right]}$$

❷❶ **(الفصل الأول للعام 2014 – 2015)** أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$u_{xx}-4x^2u_{yy}-\frac{1}{x}u_x=0$$

في المنطقة $x>0,\ |y|<\infty$ ، ثم أوجد الحل الخاص والمحقق للشروط الابتدائية:

$$u|_{x=1}=y^2+1 \quad , \quad u_x|_{x=1}=4$$

الحــل:

لدينا من المعادلة أنَّ: $A=1\ ,\ 2B=0\Rightarrow B=0\ ,\ C=-4x^2$ وبالتالي فإنَّ:

$$B^2-AC=(0)^2-(1)\left(-4x^2\right)=4x^2>0$$

وبالتالي فالمعادلة المعطاة من النمط الزائدي، ولحلها نوجد المعادلة المميزة لها:

$$Ady^2-2Bdxdy+Cdx^2=0 \Rightarrow dy^2-4x^2dx^2=0 \Rightarrow$$

$$(dy-2xdx)(dy+2xdx)=0 \Rightarrow \begin{cases} dy-2xdx \Rightarrow y-x^2=c_1 \\ dy+2xdx \Rightarrow y+x^2=c_2 \end{cases}$$

وبأخذ $\xi=y-x^2\ ,\ \eta=y+x^2$ ، ثم بحساب المشتقات نجد أن:

$$\xi_x=-2x\ ,\ \xi_{xx}=-2\ ,\ \xi_y=1\ ,\ \xi_{yy}=0\ ,\ \xi_{xy}=0$$

$$\eta_x=2x\ ,\ \eta_{xx}=2\ ,\ \eta_y=1\ ,\ \eta_{yy}=0\ ,\ \eta_{xy}=0$$

ولدينا:

$$u_{xx}=\xi_x^2 u_{\xi\xi}+\eta_x^2 u_{\eta\eta}+2\xi_x\eta_x u_{\xi\eta}+\xi_{xx}u_{\xi}+\eta_{xx}u_{\eta} \Rightarrow$$

$$\boxed{u_{xx}=4x^2u_{\xi\xi}+4x^2u_{\eta\eta}-8x^2u_{\xi\eta}-2u_{\xi}+2u_{\eta}}$$

$$u_{yy}=\xi_y^2 u_{\xi\xi}+\eta_y^2 u_{\eta\eta}+2\xi_y\eta_y u_{\xi\eta}+\xi_{yy}u_{\xi}+\eta_{yy}u_{\eta} \Rightarrow$$

$$\boxed{u_{yy}=u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+4u_{\xi\eta}}$$

$$u_x=\xi_x u_{\xi}+\eta_x u_{\eta} \Rightarrow \boxed{u_x=-2xu_{\xi}+2xu_{\eta}}$$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية نجد أن:

أمثال $u_{\xi\xi}$ هي : $4x^2-4x^2=0$

أمثال $u_{\eta\eta}$ هي: $4x^2-4x^2=0$

أمثال $u_{\xi\eta}$ هي: $-8x^2-16x^2=-24x^2$

أمثال u_{ξ} هي: $-2-\frac{1}{x}(-2x)=-2+2=0$

أمثال u_{η} هي: $2-\frac{1}{x}(2x)=2-2=0$

وبعد التعويض والاختصار نجد أن :

$$-24x^2u_{\xi\eta}=0 \Rightarrow \boxed{u_{\xi\eta}=0}\ ;\ x>0$$

وهو الشكل النموذجي للمعادلة المعطاة.

ولنوجد الحل للشكل النموذجي:

$$u_{\xi\eta}=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\eta}\left[u_{\xi}\right]=0$$

نثبت ξ ونكامل بالنسبة لـ η فنجد أن:

$$u_{\xi}=\varphi_1(\xi)$$

نثبت η ونكامل بالنسبة لـ ξ فنجد أنَّ:

$$u(\xi,\eta)=\int\varphi_1(\xi)d\xi+\psi(\eta)=\varphi(\xi)+\psi(\eta) \Rightarrow u(\xi,\eta)=\varphi(\xi)+\psi(\eta)$$

وبالعودة للمتحولات القديمة $\xi=y-x^2\ ,\ \eta=y+x^2$ نجد أن الحل العام للمعادلة المطلوبة:

$$u(x,y)=\varphi\left(y-x^2\right)+\psi\left(y+x^2\right)$$

ولإيجاد الحل الخاص المطلوب نطبق الشروط الابتدائية على الحل العام بالشكل:

نطبق الشرط الابتدائي الأول:

$$y^2+1=u|_{x=1}=\varphi(y-1)+\psi(y+1) \Rightarrow \varphi(y-1)+\psi(y+1)=y^2+1 \cdots\cdots\cdots(*)$$

نشتق الحل العام بالنسبة لـ x تمهيداً لتطبيق الشرط الابتدائي الثاني:

$$u_x = -2x\varphi'\left(y - x^2\right) + 2x\psi'\left(y + x^2\right)$$

وبتطبيق الشرط الابتدائي الثاني نجد أنَّ:

$$4 = u_x\big|_{x=1} = -2\varphi'(y-1) + 2\psi'(y+1) \;\Rightarrow$$

$$\varphi'(y-1) - \psi'(y+1) = -2 \quad \cdots\cdots\cdots(**)$$

وباشتقاق العلاقة $(*)$ بالنسبة لـ y فنجد:

$$\varphi'(y-1) + \psi'(y+1) = 2y \quad \cdots\cdots\cdots(*')$$

وبجمع العلاقتين $(*')$ و $(**)$ فنجد أنَّ:

$$2\varphi'(y-1) = 2y - 2 \;\Rightarrow\; \varphi'(y-1) = y - 1 \;\Rightarrow\; \varphi'(t) = t \;\Rightarrow \varphi(t) = \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow$$

$$\varphi(y-1) = \frac{1}{2}(y-1)^2$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$\frac{1}{2}(y-1)^2 + \psi(y+1) = y^2 + 1 \Rightarrow\; \psi(y+1) = y^2 + 1 - \frac{1}{2}(y-1)^2$$

$$\psi(y+1) = \frac{1}{2}\left[2y^2 + 2 - (y-1)^2\right] = \frac{1}{2}\left[2y^2 + 2 - y^2 + 2y - 1\right] = \frac{1}{2}(y+1)^2 \Rightarrow \boxed{\psi(t) = \frac{1}{2}t^2}$$

ومنه فإنَّ:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}t^2 \,,\; \psi(t) = \frac{1}{2}t^2 \;\Rightarrow \varphi\left(y - x^2\right) = \frac{1}{2}\left(y - x^2\right)^2 \,,\; \psi\left(y + x^2\right) = \frac{1}{2}\left(y + x^2\right)^2$$

وبالتعويض في الحل العام نجد أنَّ الحل الخاص المطلوب هو:

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left(y - x^2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(y + x^2\right)^2 = \frac{1}{2}\left[\left(y - x^2\right)^2 + \left(y + x^2\right)^2\right] = \frac{1}{2}\left[2y^2 + 2x^4\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{u(x,y) = y^2 + x^4}$$

❸ ❶**(الدورة الثالثة للعام 2011 – 2012)** لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$u_{xx} - u_{yy} - 2u_x - 2u_y = 4$$

والمطلوب:

1) إلى أي نمط تنتمي هذه المعادلة ولماذا؟

2) أوجد الحل العام لها.

3) أوجد الحل الخاص لها والمحقق للشروط الابتدائية الآتية:

$$u\big|_{x=0} = -y \quad , \quad u_x\big|_{x=0} = y - 1$$

الحـل : لدينا من المعادلة أنَّ: $A=1\ ,\ \ 2B=0 \Rightarrow B=0\ \ ,\ \ C=-1$ وبالتالي فإنَّ:

$$B^2-AC=(0)^2-(1)(-1)=1>0$$

وبالتالي فالمعادلة المعطاة من النمط الزائدي، ولحلها نوجد المعادلة المميزة لها:

$$Ady^2-2Bdxdy+Cdx^2=0 \ \Rightarrow\ dy^2-dx^2=0 \ \Rightarrow$$

$$(dy-dx)(dy+dx)=0 \Rightarrow \begin{cases} dy-dx \Rightarrow y-x=c_1 \\ dy+dx \Rightarrow y+x=c_2 \end{cases}$$

وبأخذ $\eta=y+x\ ,\ \xi=y-x$ ، ثم بحساب المشتقات نجد أن:

$$\xi_x=-1\ ,\ \xi_{xx}=0\ ,\ \xi_y=1\ ,\ \xi_{yy}=0\ ,\ \xi_{xy}=0$$

$$\eta_x=1\ ,\ \eta_{xx}=0\ ,\ \eta_y=1,\ \eta_{yy}=0\ ,\ \eta_{xy}=0$$

ولدينا:

$$u_{xx}=\xi_x^2u_{\xi\xi}+\eta_x^2u_{\eta\eta}+2\xi_x\eta_xu_{\xi\eta}+\xi_{xx}u_\xi+\eta_{xx}u_\eta \ \Rightarrow$$

$$\boxed{u_{xx}=u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-2u_{\xi\eta}}$$

$$u_{yy}=\xi_y^2u_{\xi\xi}+\eta_y^2u_{\eta\eta}+2\xi_y\eta_yu_{\xi\eta}+\xi_{yy}u_\xi+\eta_{yy}u_\eta \ \Rightarrow$$

$$\boxed{u_{yy}=u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+2u_{\xi\eta}}$$

$$u_x=\xi_xu_\xi+\eta_xu_\eta \ \Rightarrow\ \boxed{u_x=-u_\xi+u_\eta}$$

$$u_y=\xi_yu_\xi+\eta_yu_\eta \ \Rightarrow\ \boxed{u_x=u_\xi+u_\eta}$$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية نجد أن:

أمثال $u_{\xi\xi}$ هي : $1-1=0$

أمثال $u_{\eta\eta}$ هي: $1-1=0$

أمثال $u_{\xi\eta}$ هي: $-2-2=-4$

أمثال u_ξ هي: $-2+2=0$

أمثال u_η هي: $-2-2=-4$

وبعد التعويض والاختصار نجد أن :

$$-4u_{\xi\eta}-4u_\eta=4 \ \Rightarrow\ \boxed{u_{\xi\eta}+u_\eta=-1}$$

وهو الشكل النموذجي للمعادلة المعطاة.

ولنوجد الحل للشكل النموذجي:

$$u_{\xi\eta}+u_\eta=-1 \ \Rightarrow\ \frac{\partial}{\partial\eta}\left[u_\xi+u\right]=-1$$

نثبت ξ ونكامل بالنسبة لـ η فنجد:

$$u_\xi + u = -\eta + \varphi_1(\xi)$$

بتثبيت η نحصل على معادلة تفاضلية بالدالة u والمتحول المستقل ξ ولحلها نوجد عامل التكميل لها:

$$\mu = e^{\int d\xi} = e^\xi$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[e^\xi u\right] = -\eta e^\xi + e^\xi \varphi_1(\xi) = -\eta e^\xi + \varphi_2(\xi)$$

وبتثبيت η والمكاملة بالنسبة لـ ξ نجد أنَّ:

$$e^\xi u = -\eta e^\xi + \varphi(\xi) + \psi(\eta) \Rightarrow u(\xi, \eta) = -\eta + e^{-\xi}\left[\varphi(\xi) + \psi(\eta)\right]$$

وبالعودة للمتحولات القديمة $\xi = y - x \ , \ \eta = y + x$ نجد أنَّ الحل العام هو:

$$u(x, y) = -(y + x) + e^{-(y-x)}\left[\varphi(y - x) + \psi(y + x)\right]$$

ولإيجاد الحل الخاص المطلوب نطبق الشروط الابتدائية على الحل العام بالشكل:

نطبق الشرط الابتدائي الأول:

$$-y = u\big|_{x=0} = -y + e^{-y}\left[\varphi(y) + \psi(y)\right] \Rightarrow \varphi(y) + \psi(y) = 0 \cdots\cdots\cdots (*)$$

نشتق الحل العام بالنسبة لـ x تمهيداً لتطبيق الشرط الابتدائي الثاني:

$$u_x = -1 + e^{-(y-x)}\left[\varphi(y - x) + \psi(y + x)\right] + e^{-(y-x)}\left[-\varphi'(y - x) + \psi'(y + x)\right]$$

وبتطبيق الشرط الابتدائي الثاني نجد أنَّ:

$$y - 1 = u_x\big|_{x=0} = -1 + e^{-y}\left[\varphi(y) + \psi(y)\right] + e^{-y}\left[-\varphi'(y) + \psi'(y)\right] \Rightarrow$$

$$e^{-y}\left[\varphi(y) + \psi(y)\right] + e^{-y}\left[-\varphi'(y) + \psi'(y)\right] = y \quad \cdots\cdots\cdots (**)$$

وبتعويض العلاقة $(*)$ في العلاقة $(**)$ نجد أنَّ :

$$e^{-y}\left[-\varphi'(y) + \psi'(y)\right] = y \Rightarrow -\varphi'(y) + \psi'(y) = y\, e^y \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

ولدينا من العلاقة $(*)$ أنَّ:

$$\varphi(y) + \psi(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = -\psi(y) \Rightarrow \varphi'(y) = -\psi'(y) \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

وبتعويض (2) في (1) نجد أنَّ:

$$-\left[-\psi'(y)\right] + \psi'(y) = y\, e^y \Rightarrow 2\psi'(y) = y\, e^y \Rightarrow \psi'(y) = \frac{1}{2} y\, e^y \Rightarrow$$

$$\psi(y) = \frac{1}{2}\int y\, e^y dy = \frac{1}{2} e^y (y - 1) \Rightarrow \boxed{\psi(y) = \frac{1}{2} e^y (y - 1)}$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$\varphi(y)+\frac{1}{2}e^{y}(y-1)=0 \Rightarrow \boxed{\varphi(y)=-\frac{1}{2}e^{y}(y-1)}$$

إذاً أصبح لدينا:

$$\varphi(y)=-\frac{1}{2}e^{y}(y-1) \Rightarrow \varphi(y-x)=-\frac{1}{2}e^{y-x}(y-x-1)$$

$$\psi(y)=\frac{1}{2}e^{y}(y-1) \Rightarrow \psi(y+x)=\frac{1}{2}e^{y+x}(y+x-1)$$

وبالتعويض في صيغة الحل العام نجد أن الحل الخاص المطلوب هو:

$$u(x,y)=-(y+x)+e^{-(y-x)}\left[-\frac{1}{2}e^{y-x}(y-x-1)+\frac{1}{2}e^{y+x}(y+x-1)\right]$$

$$=-(y+x)+\left[-\frac{1}{2}e^{y-x-y+x}(y-x-1)+\frac{1}{2}e^{y+x-y+x}(y+x-1)\right]$$

$$=-(y+x)+-\frac{1}{2}(y-x-1)+\frac{1}{2}e^{2x}(y+x-1)$$

$$=-\frac{1}{2}(3y+x-1)+\frac{1}{2}e^{2x}(y+x-1) \Rightarrow$$

$$\boxed{u(x,y)=\frac{1}{2}\left[e^{2x}(y+x-1)-(3y+x-1)\right]}$$

تمرينات غير محلولة يطلب من الطالب حلها:

❶ **(الفصل الأول للعام 2005 – 2006)**: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$x^2u_{xx}-y^2u_{yy}-2yu_y=0$$

في المنطقة $y>0$، ثم أوجد الحل الخاص والمحقق للشروط الابتدائية:

$$u|_{x=1}=y \quad , \quad u_x|_{x=1}=y$$

ملاحظات حول حل التمرين:

$$\xi=x.y \quad , \quad \eta=\frac{y}{x}$$

المعادلة النموذجية :

$$u_{\xi\eta}+\frac{1}{2\eta}u_{\xi}=0$$

حل المعادلة النموذجية :

$$u(\xi,\eta)=\eta^{-\frac{1}{2}}\left[\varphi(\xi)+\psi(\eta)\right]$$

الحل العام: $u(x,y)=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\varphi(x.y)+\psi\left(\frac{y}{x}\right)\right]$

الحل الخاص المطلوب: $\boxed{u(x,y)=\frac{2}{3}x^2y+\frac{1}{3}\frac{y}{x}}$

❷**(الفصل الأول للعام 2007 – 2008)** لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الآتية:

$$xu_{xx}-u_{yy}+\frac{1}{2}u_x=-4$$

وبفرض $x>0$، والمطلوب:

1) أوجد الحل العام لهذه المعادلة.

2) أوجد الحل الخاص لها، والمحقق للشروط الابتدائية الآتية:

$$u|_{y=0}=-4x \quad , \quad u_y|_{y=0}=0$$

ملاحظات حول حل التمرين:

$$B^2-AC=0-(x)(-1)=x>0$$

فالمعادلة المعطاة من النمط الزائدي.

$$\xi=y+2\sqrt{x} \ , \ \eta=y-2\sqrt{x}$$

المعادلة النموذجية : $u_{\xi\eta}=1$

حل المعادلة النموذجية :

$$u(\xi,\eta)=\xi\eta+[\varphi(\xi)+\psi(\eta)]$$

الحل العام:

$$u(x,y)=(y^2-4x)+\left[\varphi\left(y+2\sqrt{x}\right)+\psi\left(y-2\sqrt{x}\right)\right]$$

الحل الخاص المطلوب: $\boxed{u(x,y)=y^2-4x}$

لقد جاء نفس التمرين في دورة الفصل الثاني للعام **2010 – 2011** بالشكل:

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية الآتية:

$$2xu_{xx}-2u_{yy}+u_x=-8$$

في المنطقة $x>0$، ثم أوجد الحل الخاص لها، والمحقق للشروط الابتدائية الآتية:

$$u|_{y=0}=-4x \quad , \quad u_y|_{y=0}=4\sqrt{x}$$

نلاحظ أن الاختلاف فقط في الشروط الابتدائية وبالتالي فالحل العام يبقى نفسه بينما يختلف الحل الخاص وتكون النتيجة هي: $\boxed{u(x,y)=y^2-4x+4y\sqrt{x}}$

❸(الدورة التكميلية للعام 2007 – 2008) لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الآتية:

$$y^2u_{xx}+u_{xy}=0$$

والمطلوب:

1) أوجد الحل العام لهذه المعادلة.

2) أوجد الحل الخاص لها، والمحقق للشروط الابتدائية الآتية:

$$u\big|_{y=2}=3x+8 \quad , \quad u\big|_{x=\frac{1}{3}y^3}=2y^3$$

ملاحظات حول حل التمرين:

$$B^2-AC=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(y^2\right)(0)=\frac{1}{4}>0$$

فالمعادلة المعطاة من النمط الزائدي.

$$\xi=y^3-3x \quad , \ \eta=y$$

المعادلة النموذجية : $u_{\xi\eta}=0$

حل المعادلة النموذجية : $u(\xi,\eta)=\varphi(\xi)+\psi(\eta)$

الحل العام: $u(x,y)=\varphi\left(y^3-3x\right)+\psi(y)$

الحل الخاص المطلوب: $\boxed{u(x,y)=y^3+3x}$

❹ **(الدورة الاستثنائية للعام 2009 – 2010):** أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$2u_{xy}-e^{-x}u_{yy}=4x$$

ثم أوجد الحل الخاص والمحقق للشروط الابتدائية الآتية:

$$u\big|_{y=x}=x^5\cos x \quad , \quad u_y\big|_{y=x}=x^2+1$$

ملاحظات حول حل التمرين:

$$\xi=x \quad , \ \eta=2y-e^{-x}$$

المعادلة النموذجية :

$$u_{\xi\eta}=\xi$$

حل المعادلة النموذجية :

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\xi^2\eta+\varphi(\xi)+\psi(\eta)$$

الحل العام:

$$u(x,y)=\frac{1}{2}x^2\left(2y-e^{-x}\right)+\varphi(x)+\psi\left(2y-e^{-x}\right)$$

الحل الخاص المطلوب: $\boxed{u(x,y)=(y-x)\left(x^2+1\right)+x^5\cos x}$

❺(**الفصل الثاني للعام 2005 – 2006**) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$(x+y)u_{xy}+u_x=2(x+y)$$

ثم أوجد الحل الخاص والمحقق للشروط الابتدائية $(\infty> y\ ,\ 0< x)$:

$$u\big|_{y=x}=x^2\quad ,\quad u_x\big|_{y=x}=2x$$

ملاحظات حول الحل:

المعادلة المعطاة مكتوبة بالشكل النموذجي، والحل العام لها هو:

$$u(x,y)=\frac{1}{2}(x+y)^2+\int_0^x\frac{1}{(\xi+y)}\varphi(\xi)d\xi+\psi(y)$$

أما الحل الخاص المطلوب فهو: $\boxed{u(x,y)=\frac{1}{2}(x+y)^2-y^2}$

❻(**الفصل الثاني للعام 2011 – 2012**) لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الآتية:

$$x\,u_{xy}-yu_{yy}-u_y=2x^3$$

والمطلوب:

1) أثبت أنَّ المعادلة المعطاة من النمط الزائدي ، ثمَّ أوجد الحل العام لها.
2) أوجد الحل الخاص لها، والمحقق للشروط الابتدائية الآتية:

$$u\big|_{y=x}=\sin x\quad ,\quad u_x\big|_{y=x}=\cos x$$

ملاحظات حول حل التمرين:

$$B^2-AC=\left(\frac{x}{2}\right)^2-(0)(-y)=\frac{1}{4}x^2>0$$

فالمعادلة المعطاة من النمط الزائدي.

$$\xi=x\quad ,\ \eta=xy$$

المعادلة النموذجية :

$$u_{\xi\eta} = 2\xi$$

حل المعادلة النموذجية :

$$u(\xi,\eta) = \xi^2\eta + \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

الحل العام:

$$u(x,y) = x^3 y + \varphi(x) + \psi(xy)$$

الحل الخاص المطلوب:
$$\boxed{u(x,y) = \sin x - \frac{1}{2}\left(x^2 - xy\right)^2}$$

❼ لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الآتية:

$$y\,u_{xx} - (x+y)\,u_{xy} + x\,u_{yy} = 0$$

والمطلوب: أوجد الحل الخاص لها، والمحقق للشروط الابتدائية الآتية:

$$u\big|_{y=0} = x^3 \ , \quad u_y\big|_{y=0} = 0$$

ملاحظات حول حل التمرين:

$$B^2 - AC = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - (y)(x) = \frac{1}{4}(x-y)^2 > 0$$

فالمعادلة المعطاة من النمط الزائدي.

$$\xi = y + x \ , \ \eta = y^2 + x^2$$

المعادلة النموذجية :

$$u_{\xi\eta} + \frac{\xi}{\left(\xi^2 - 2\eta\right)} u_\eta = 0$$

حل المعادلة النموذجية :

$$u(\xi,\eta) = \int_0^\eta \left(2z - \xi^2\right)^{-\frac{1}{2}} \psi(z)\,dz + \varphi(\xi)$$

الحل العام:

$$u(x,y) = \int_0^{x^2+y^2} \left(2z - (y+x)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \psi(z)\,dz + \varphi(x+y)$$

الحل الخاص المطلوب:
$$\boxed{u(x,y) = x^3 - y^3}$$

✍ انتهى الفصل الأول

❶(**الفصل الأول للعام 2015 – 2016**) أثبت أن طاقة الذبذبات العرضية للوتر المثبت من طرفيه تعطى بالعلاقة الآتية:

$$E=\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left[T_0\left(u_x\right)^2+\rho\left(x\right)\left(u_t\right)^2\right]dx$$

علماً أنَّ T_0 مقدار ثابت (مقدار الشد)، و $\rho\left(x\right)$ الكثافة الخطية للوتر.

الحل:

نعين صيغة طاقة الذبذبات العرضية للوتر $E=K+U$ علماً أنَّ U طاقة الوضع و K طاقة الحركة، وذلك كما يلي:

عنصر الوتر dx الذي يتحرك بالسرعة $v=u_t$ يكون له طاقة حركة هي:

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\rho\left(x\right)dx\left[u_t\left(x,t\right)\right]^2=\frac{1}{2}\rho\left(x\right)\left[u_t\left(x,t\right)\right]^2dx$$

وبالتالي فإن طاقة حركة الوتر كله تساوي:

$$K=\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\rho\left(x\right)\left[u_t\left(x,t\right)\right]^2dx$$

وطاقة الذبذبات العرضية للوتر ذي الشكل: $u\left(x,t_0\right)=u_0\left(x\right)$ في اللحظة الزمنية $t=t_0$ تساوي العمل اللازم بذله لكي ينتقل الوتر من وضع التوازن إلى الوضع $u_0\left(x\right)$.

نفرض أنَّ الدالة $u\left(x,t\right)$ تعطي المقطع الجانبي للوتر في اللحظة t علماً أنَّ:

$$u\left(x,t_0\right)=u_0\left(x\right)\quad,\ u\left(x,0\right)=0$$

والعنصر dx تحت تأثير محصلة قوى الشد: $T\,u_x\big|_{x+dx}-T\,u_x\big|_x=Tu_{xx}dx$ يقطع خلال الفترة الزمنية dt المسافة $u_t\left(x,t\right)dt$ ، والعمل الذي يبذله الوتر كله خلال الفترة dt يساوي:

$$\left\{\int_0^{\ell}T_0u_{xx}\left(x,t\right)u_t\left(x,t\right)dx\right\}dt=\left\{T_0u_x\,u_t\Big|_{x=0}^{x=\ell}-\int_0^{\ell}T_0u_x\,u_{xt}\,dx\right\}dt$$

(تكامل بالتجزئة)

$$=\left\{T_0u_x\,u_t\Big|_{x=0}^{x=\ell}-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{\ell}T_0\left(u_x\right)^2dx\right\}dt$$

وبإجراء التكامل بالنسبة لـ t وذلك من $t=0$ إلى $t=t_0$ نحصل على:

$$\int_0^{t_0}\left\{T_0u_x\,u_t\Big|_{x=0}^{x=\ell}-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{\ell}T_0\left(u_x\right)^2dx\right\}dt=\int_0^{t_0}T_0u_x\,u_t\Big|_{x=0}^{x=\ell}dt-\frac{1}{2}\left[\int_0^{\ell}T_0\left(u_x\right)^2dx\right]_{t=0}^{t=t_0}$$

$$=\int_0^{t_0}T_0u_x\,u_t\Big|_{x=0}^{x=\ell}dt-\frac{1}{2}\int_0^{\ell}T_0\left[u_x\left(x,t_0\right)\right]^2dx$$

والحد الأول من الطرف الأيمن لهذه المساواة يساوي الصفر، لأنَّ:

$T_0u_x\big|_{x=0}$ هو مقدار الشد في طرف الوتر $x=0$ و $u_t\left(x,t\right)\big|_{x=0}dt$ هو ازاحة هذا الطرف، والتكامل:

$$\int_0^{t_0} T_0 u_x u_t \big|_{x=0} dt$$

هو عبارة عن العمل اللازم بذله لإزاحة الطرف $x=0$ ، وللحد المناظر للطرف $x=\ell$ معنى مماثل.

وإذا كان طرفا الوتر مثبتين فإن العمل على طرفي الوتر يكون مساوياً للصفر عند ذلك يكون:

$$u_t(x,t)\big|_{x=0}=0 \;\;,\;\; u(x,t)\big|_{x=0}=0$$

ومن ثم العمل لا يعتمد عند انتقال الوتر المثبت الطرفين من وضع التوازن $u=0$ إلى الوضع $u_0(x)$ على طريقة نقل الوتر إلى هذا الوضع، ويكون مساوياً: $-\frac{1}{2}\int_0^{\ell} T_0\left[u_x(x,t_0)\right]^2 dx$ ، أي لطاقة وضع الوتر في اللحظة $t=t_0$ بإشارة مضادة، وبذلك تكون الطاقة الكلية للوتر مساوية لـ: $E=\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left[T_0(u_x)^2+\rho(x)(u_t)^2\right]dx$.

❷ (الفصل الثاني للعام 2008 – 2009):

1) من الممكن وجود دالة واحدة فقط $u(x,t)$، معرفة في المنطقة $R=\{0\le x\le \ell\;,\;t\ge 0\}$، وتحقق المعادلة التفاضلية:

$$\rho(x)u_{tt}=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)u_x\right]+F(x,t) \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

علماً أنَّ: $0<k(x)\;,\;0<\rho(x)\;,\;\ell>x>0\;,\;0<t$ ، والشروط الإضافية:

$$u(x,0)=\varphi(x)\;,\;u_t(x,0)=\psi(x)\;,\;u(0,t)=\mu_1(t)\;,\;u(\ell,t)=\mu_2(t) \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

إذا تحققت الشروط الآتية:

أ) الدالة $u(x,t)$ والمشتقات التي تدخل في المعادلة التفاضلية، وكذلك المشتقة u_{xt} تكون دوال متصلة في الفترة $R=\{0\le x\le \ell\;,\;t\ge 0\}$.

ب) المعاملان $\rho(x)\,,\,k(x)$ متصلان في الفترة المغلقة $0\le x\le \ell$.

2) أوجد حل المعادلة في حالة:

$$\mu_1(t)=1\;,\;\mu_2(t)=t\;,\;\varphi(x)=1-\frac{x}{\pi}+\sin(2x)\;,\;\psi(x)=\frac{x}{\pi}$$

$$F(x,t)=\sin x\sin t\;,\;\rho(x)=k(x)=1\;,\;\ell=\pi$$

القسم النظري:

بفرض أنه يوجد حلان للمسألة المطروحة $\left[(1),(2)\right]$ هما:

$$u_1(x,t)\;,\;u_2(x,t)$$

وبعد ذلك ندرس الفرق:

$$v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$$

❶ وسوف نثبت أنَّ الدالة $v(x,t)$ تحقق المعادلة المتجانسة الموافقة لـ(1) أي المعادلة:

$$\rho(x)v_{tt}=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)v_x\right]\quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

الإثبات: بما أن $u_1(x,t)$ هو حل للمعادلة المعطاة (1) فهو يحققها أي أن:

$$\rho(x)(u_1)_{tt}=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)(u_1)_x\right]+F(x,t)$$

وبما أن $u_2(x,t)$ هو حل للمعادلة المعطاة (1) فهو يحققها أي أن:

$$\rho(x)(u_2)_{tt}=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)(u_2)_x\right]+F(x,t)$$

وبطرح العلاقتين السابقتين نجد أنَّ:

$$\rho(x)\left[(u_1)_{tt}-(u_2)_{tt}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\left[(u_1)_x-(u_2)_x\right]\right]$$

وبالتعويض عن $u_1(x,t)-u_2(x,t)$ بـ$v(x,t)$ نحصل على العلاقة (3).

❷ وأيضاً الدالة $v(x,t)$ تحقق الشروط الإضافية المتجانسة التالية:

$$\left.\begin{aligned} v(x,0)=0\quad &,\quad v_t(x,0)=0 \\ v(0,t)=0\quad &,\quad v(\ell,t)=0 \end{aligned}\right\}\quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

وذلك لأنَّ:

$$v(0,t)=u_1(0,t)-u_2(0,t)=\mu_1(t)-\mu_1(t)=0$$
$$v(\ell,t)=u_1(\ell,t)-u_2(\ell,t)=\mu_2(t)-\mu_2(t)=0$$
$$v(x,0)=u_1(x,0)-u_2(x,0)=\varphi(x)-\varphi(x)=0$$
$$v_t(x,0)=u_{1t}(x,0)-u_{2t}(x,0)=\psi(x)-\psi(x)=0$$

❸ سوف نثبت أن الدالة $v(x,t)$ تساوي الصفر بالتطابق، وذلك كما يلي:

ندرس الدالة:

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left[k(v_x)^2+\rho(v_t)^2\right]dx\quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

وسوف نثبت أنها لا تعتمد على t :

المعنى الفيزيائي للدالة $E(t)$ واضح، فهي الطاقة الكلية للوتر في اللحظة الزمنية t ، وباشتقاق طرفي العلاقة (5) بالنسبة لـ t نجد:

$$\frac{dE(t)}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{\ell}\left[k(v_x)^2+\rho(v_t)^2\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left[2k(v_xv_{xt})+2\rho(v_tv_{tt})\right]dx=$$

$$=\int_0^{\ell}\left[k(v_xv_{xt})+\rho(v_tv_{tt})\right]dx$$

وبمكاملة الحد الأول من الطرف الأيمن بالتجزئة وبالاستفادة من الشروط الإضافية المتجانسة (4) نجد:

$$u=kv_x\Rightarrow du=(kv_x)_x\,dx\quad,\ dv=v_{xt}dx\Rightarrow v=v_t$$

$$\int_0^{\ell}k(v_xv_{xt})\,dx=\left[kv_xv_t\right]_{x=0}^{x=\ell}-\int_0^{\ell}v_t(kv_x)_x\,dx=-\int_0^{\ell}v_t(kv_x)_x\,dx\ \cdots\cdots(6)$$

$$;\ v_x(0,t)=v_x(\ell,t)=0$$

وبتعويض العلاقة (6) في العلاقة الأخيرة التي تسبقها، وبالاستعانة بالعلاقة(3) ينتج أنَّ:

$$\frac{dE(t)}{dt}=\int_0^{\ell}\left[\rho(v_tv_{tt})-v_t(kv_x)_x\right]dx=\int_0^{\ell}v_t\underbrace{\left[\rho(v_{tt})-(kv_x)_x\right]}_{=0\ ,(3)}dx=0$$

إذاً:

$$\frac{dE(t)}{dt}=0\Rightarrow E(t)=const$$

وبأخذ الشروط الابتدائية (4) بعين الاعتبار نجد أنَّ:

$$const=E(0)=\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\underbrace{\left[k(v_x)^2+\rho(v_t)^2\right]_{t=0}}_{=0\ ;\ t=0}dx=0$$

ومن ثم ينتج أنَّ: $E(t)=0$ أي أنَّ العلاقة (5) تكتب على الشكل:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left[k(v_x)^2+\rho(v_t)^2\right]dx=0$$

وبما أنَّ $k(x)>0$، و $\rho(x)>0$، و $0<x<\ell$, $t>0$ فإن العلاقة الأخيرة تتحقق فقط عندما يكون:

$$v_x(x,t)=0\ ,\ v_t(x,t)=0$$

وبما أنَّ:

$$v_t(x,t)=0\Rightarrow v(x,t)=c_0=const$$

وبالاستفادة من الشروط (4) نجد أنَّ:

$$0=v(x,0)=c_0\Rightarrow\boxed{c_0=0}$$

وبالتالي نجد أنَّ: $v(x,t)=0$ وبالتالي فإنَّ:

$$0=v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)\Rightarrow u_1(x,t)-u_2(x,t)=0\Rightarrow\boxed{u_1(x,t)=u_2(x,t)}$$

أي أنه إذا وجدت دالتين $u_1(x,t)\,,u_2(x,t)$ تحققان شروط المسألة المعطاة فإنَّ: $u_1(x,t)=u_2(x,t)$ أي أن للمسألة المعطاة حل وحيد.

2) القسم العملي: أوجد حل المعادلة في حالة:

$$\mu_1(t)=1\ ,\ \mu_2(t)=t\ ,\ \varphi(x)=1-\frac{x}{\pi}+\sin(2x)\ \ ,\ \psi(x)=\frac{x}{\pi}$$

$$F(x,t)=\sin x\ \sin t\ \ ,\ \rho(x)=k(x)=1\ ,\ \ell=\pi$$

بتعويض المعطيات في المسألة المعطاة فإنها تأخذ الشكل:

$$u_{tt}=u_{xx}+\sin x\ \sin t\quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

مع الشروط الابتدائية: $u(x,0)=1-\frac{x}{\pi}+\sin(2x)\quad ,\ u_t(x,0)=\frac{x}{\pi}\quad \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية غير المتجانسة: $u(0,t)=1\ ,\ u(\pi,t)=1\quad \cdots\cdots\cdots(3)$

الحـل:

إن المسألة الحدية المعطاة هي مسألة حدية غير متجانسة بشروط حدية غير صفرية وفيها:

$$a=1\ ,\ \ell=\pi\ ,\ \ f(x,t)=\sin x\ \sin t$$

$$\varphi(x)=1-\frac{x}{\pi}+\sin(2x)\ ,\ \psi(x)=\frac{x}{\pi}$$

$$\mu_1(t)=1\ ,\ \mu_2(t)=t$$

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=U(x,t)+v(x,t)\quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

علماً أنَّ:

$$U(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{\ell}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]=1+\frac{x}{\pi}[t-1]=1$$

$$\boxed{U(x,t)=1+\frac{x}{\pi}(t-1)}\quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

$$U_t(x,t)=\frac{x}{\pi}\ \ ,\ U_{tt}(x,t)=0\ ,\ U_{xx}(x,t)=0\ \ ,\ U(x,0)=1-\frac{x}{\pi}\ \ ,\ U_t(x,0)=\frac{x}{\pi}$$

أما $v(x,t)$ فهي حل للمسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=a^2v_{xx}+\overline{f}(x,t)$$

مع الشروط الابتدائية: $v(x,0)=\overline{\varphi}(x)\ ,\ \ v_t(x,0)=\overline{\psi}(x)$

والشروط الحدية الصفرية: $v(0,t)=0\quad ,\quad v(\ell,t)=0$

علماً أنَّ:

$$\overline{f}(x,t)=f(x,t)-\left(U_{tt}-a^2U_{xx}\right)=\sin x\sin t-\left[0-1(0)\right]=\sin x\sin t$$

$$\overline{\varphi}(x)=\varphi(x)-U(x,0)=1-\frac{x}{\pi}+\sin(2x)-\left(1-\frac{x}{\pi}\right)=\sin(2x)$$

$$\overline{\psi}(x)=\psi(x)-U_t(x,0)=\frac{x}{\pi}-\frac{x}{\pi}=0$$

وبالتالي فإنَّ $v(x,t)$ هي حل للمسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=v_{xx}+\sin x\sin t\quad\cdots\cdots\cdots(1')$$

مع الشروط الابتدائية: $v(x,0)=\sin 2x\ ,\ v_t(x,0)=0\quad\cdots\cdots\cdots(2')$

والشروط الحدية الصفرية: $v(0,t)=0\quad,\quad v(\pi,t)=0\quad\cdots\cdots\cdots(3')$

وحل هذه المسألة الحدية الجديدة يعطى بالدستور التالي:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\cdots\cdots\cdots(4')$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\varphi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi\quad,\quad D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\overline{\psi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

$$T_n(t)=\frac{\ell}{n\pi a}\int_0^{t}\overline{f_n}(\tau)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}a(t-\tau)\right)d\tau$$

$$\overline{f_n}(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{f}(\xi,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

بما أن $\overline{\psi}(x)=0$ فإنَّ $\overline{\psi}(\xi)=0$ وبالتالي فإنَّ $D_n=0$، وكما أن:

$$C_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(2\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\xi\right)d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(2\xi)\sin(n\xi)d\xi=\frac{2}{\pi}\begin{cases}\frac{\pi}{2}\ ;\ n=2\\0\ ;\ n\neq 2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\boxed{C_n=\begin{cases}1\ ;\ n=2\\0\ ;\ n\neq 2\end{cases}}$$

وأيضاً:

$$\overline{f_n}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\xi\sin t\,\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\xi\right)d\xi=\frac{2}{\pi}\sin t\int_0^{\pi}\sin\xi\,\sin(n\xi)d\xi=\frac{2}{\pi}\sin t\begin{cases}\frac{\pi}{2}\ ;\ n=1\\0\ ;\ n\neq 1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\boxed{\overline{f_n}(t)=\begin{cases}\sin t\ ;\ n=1\\0\ ;\ n\neq 1\end{cases}}$$

وبما أنَّ $f_n(t)=0$ من أجل $n\neq 1$ فإنَّ $T_n(t)=0$ من أجل $n\neq 1$ وبالتالي فإنَّ:

$$T_1(t)=\frac{\pi}{(1)\pi(1)}\int_0^t \sin\left[\frac{(1)\pi}{\pi}(1)(t-\tau)\right]\sin\tau\,d\tau=\int_0^t \sin(t-\tau)\sin\tau\,d\tau=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^t\left[\cos(t-\tau+\tau)-\cos(t-\tau-\tau)\right]d\tau=-\frac{1}{2}\cos t\int_0^t d\tau+\frac{1}{2}\int_0^t\cos(t-2\tau)d\tau$$

$$=-\frac{1}{2}t\cos t+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\sin(t-2\tau)\right]_0^t=-\frac{1}{2}t\cos t-\frac{1}{4}\left[\sin(t-2\tau)\right]_0^t=$$

$$=-\frac{1}{2}t\cos t-\frac{1}{4}\left[\sin(-t)-\sin(t)\right]=-\frac{1}{2}t\cos t+\frac{1}{2}\sin t=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$$

وبالتالي نجد أنَّ:

$$T_n(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)\ ;\ n=1\\ 0\ ;\ n\neq 1\end{cases}$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في عبارة الحل للمسألة الجديدة $(4')$ نجد أنَّ:

$$v(x,t)=\cos(2t)\sin(2x)+\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)\sin x\quad\cdots\cdots\cdots(5')$$

بتعويض العلاقتين $(5')$ و (5) في العلاقة (4) نحصل على عبارة الحل العام للمسألة الحدية المعطاة:

$$\boxed{u(x,t)=1+\frac{x}{\pi}(t-1)+\cos(2t)\sin(2x)+\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)\sin x}$$

❸ **معادلة الذبذبات المتجانسة(علاقة دالامبير):** أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية: $u(x,0)=\varphi(x)\ ,\ u_t(x,0)=\psi(x)\quad\cdots\cdots\cdots(2)$

علماً أنَّ $\psi(x)$ ، $\varphi(x)$ دالتان معلومتان.

الحـل:

لدينا من المعادلة أن: $A=1\ ,\ B=0\ ,\ C=-a^2$

ومنه فإنَّ: $B^2-AC=0-(1)\left(-a^2\right)=a^2>0$

وبالتالي فالمعادلة المعطاة من النمط الزائدي، والمعادلة المميزة لها هي:

$$Adx^2-2Bdxdt+Cdt^2=0\ \Rightarrow\ dx^2-a^2dt^2=0\ \Rightarrow\ (dx+adt)(dx-adt)=0\ \Rightarrow$$

$$\begin{cases}dx+adt=0\Rightarrow x+at=c_1\\ dx-adt=0\Rightarrow x-at=c_2\end{cases}$$

وبأخذ $\xi = x + at$ ، و $\eta = x - at$ ثم بحساب المشتقات نجد أنَّ:

$$\xi_x = 1 \,,\; \xi_{xx} = 0 \;,\; \xi_t = a \,,\; \xi_{tt} = 0 \;,\; \xi_{xt} = 0$$
$$\eta_x = 1 \,,\; \eta_{xx} = 0 \;,\; \eta_t = -a \,,\; \eta_{tt} = 0 \;,\; \eta_{xt} = 0$$

ومنه فإنَّ:

$$u_{xx} = \xi_x^2 u_{\xi\xi} + \eta_x^2 u_{\eta\eta} + 2\xi_x \eta_x u_{\xi\eta} + \xi_{xx} u_{\xi} + \eta_{xx} u_{\eta} \;\Rightarrow\; \boxed{-a^2 u_{xx} = -a^2 u_{\xi\xi} - a^2 u_{\eta\eta} - 2a^2 u_{\xi\eta}}$$
$$u_{tt} = \xi_t^2 u_{\xi\xi} + \eta_t^2 u_{\eta\eta} + 2\xi_t \eta_t u_{\xi\eta} + \xi_{tt} u_{\xi} + \eta_{tt} u_{\eta} \;\Rightarrow\; \boxed{u_{tt} = a^2 u_{\xi\xi} + a^2 u_{\eta\eta} - 2a^2 u_{\xi\eta}}$$

وبالتعويض في المعادلة (1) والاختصار نجد أنَّ الشكل النموذجي لها هو:

$$-4a^2 u_{\xi\eta} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{u_{\xi\eta} = 0 \quad ; a \neq 0}$$

$$u_{\xi\eta} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial \xi}\left[u_{\eta}\right] = 0$$

بتثبيت η والمكاملة بالنسبة لـ ξ نجد أنَّ: $\qquad u_{\eta} = f\,(\eta)$

بتثبيت ξ والمكاملة بالنسبة لـ η نجد أنَّ:

$$u(\xi,\eta) = \int f\,(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

وبتعويض $\xi = x + at \;,\; \eta = x - at$ نجد أن الحل العام للمعادلة (1) هو:

$$u(x\,,t) = f_1(x + at) + f_2(x - at)$$

ولإيجاد الحل الموافق للشروط الابتدائية (2) نطبق الشروط على الحل العام:

تطبيق الشرط الابتدائي الأول:

$$\varphi(x) = u(x\,,0) = f_1(x) + f_2(x) \;\;\Rightarrow f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

نشتق الحل العام بالنسبة لـ t تمهيداً لتطبيق الشرط الابتدائي الثاني:

$$u_t = a f_1'(x + at) - a f_2'(x - at)$$

تطبيق الشرط الابتدائي الثاني:

$$\psi(x) = u_t\,(x\,,0) = a f_1'(x) - a f_2'(x) \;\Rightarrow\; f_1'(x) - f_2'(x) = \frac{1}{a}\psi(x) \quad \cdots\cdots\cdots(**)$$

وبمكاملة طرفي العلاقة $(**)$ بالنسبة لـ x نجد أنَّ:

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(z) dz \quad \cdots\cdots\cdots(*')$$

وبجمع العلاقتين $(*)$ و $(*')$ نجد أنَّ:

$$2f_1(x)=\varphi(x)+\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz \quad\Rightarrow\quad f_1(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{f_1(x+at)=\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at}\psi(z)dz}$$

وبطرح العلاقة $(*')$ من العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$2f_2(x)=\varphi(x)-\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz \quad\Rightarrow\quad f_2(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz \quad\Rightarrow$$

$$f_2(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_{x}^{x_0}\psi(z)dz$$

$$\boxed{f_2(x-at)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x_0}\psi(z)dz}$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في الحل العام نجد أنَّ الحل المطلوب والمحقق للشروط الابتدائية (2) هو:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at}\psi(z)dz+\frac{1}{2}\varphi(x-at)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x_0}\psi(z)dz \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz}$$

❹**(الفصل الأول للعام 2009 – 2010):** أوجد حل معادلة الذبذبات الحرة للوتر غير المتجانسة:

$$\frac{1}{a^2}u_{tt}=u_{xx}+f(x,t) \quad ,(-\infty<x<+\infty \;,\; t>0) \;\cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية: $u(x,0)=\varphi(x) \;,\; u_t(x,0)=\psi(x) \;,\; -\infty<x<+\infty \;\cdots\cdots\cdots(2)$

علماً أنَّ $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\psi'(x)$ ، $\varphi''(x)$ موجودة.

تطبيق: أوجد حل المسألة السابقة في حالة:

$$f(x,t)=\frac{1}{9}\sin x \;,\; a=3 \;,\; \varphi(x)=1 \;,\; \psi(x)=1$$

القسم النظري:

بفرض أنَّ $w_f(x,t,\tau)$ هو حل مسألة كوشي المساعدة:

$$\frac{1}{a^2}(w_f)_{tt}=(w_f)_{xx} \;;\; t>\tau \;,\; -\infty<x<+\infty \;\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$w_f(x,\tau,\tau)=0 \;,\; \frac{\partial}{\partial t}w_f(x,\tau,\tau)=f(x,\tau) \;,\; t=\tau \;,\; -\infty<x<+\infty \;\cdots\cdots\cdots(4)$$

وتعطينا علاقة دالأمبير السابقة(للمسألة المتجانسة):

$$w_f(x,t,\tau)=w_f(x,t-\tau,\tau)=\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

ومن جهة أخرى، نكتب علاقة دالأمبير على الصورة:

$$u(x,t)=\frac{\partial w_\varphi(x,t,0)}{\partial t}+w_\psi(x,t,0) \quad \cdots\cdots\cdots(6)$$

علماً أنَّ:

$$w_\psi(x,t,0)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi \quad , \; w_\varphi(x,t,0)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)d\xi$$

هما حلاً لمسألة كوشي المتجانسة$[(4),(3)]$ عندما $\tau=0$، و $f=\psi(x)$, $f=\varphi(x)$ على الترتيب، لأن عملية التفاضل مباشرة توضح أنَّ:

$$\frac{\partial}{\partial t}w_\varphi(x,t,0)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)d\xi\right]=\frac{1}{2a}\left[(a)-\varphi(x+at)(-a)+0\right]$$

$$=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}$$

والآن سوف نثبت أن حل المعادلة غير المتجانسة (1) بالشروط الابتدائية الصفرية:

$$u(x,0)=0 \quad , \quad u_t(x,0)=0$$

على الصورة:

$$u(x,t)=a^2\int_0^t w_f(x,t,\tau)\,d\tau \quad \cdots\cdots\cdots(7)$$

بمفاضلة العلاقة (7) مع الأخذ بعين الاعتبار الشروط(4)للدالة $w_f(x,t,\tau)$ نحصل على العلاقات (8) التالية:

$$u_t(x,t)=a^2\underbrace{w_f(x,t,t)}_{=0\;;\;\tau=t}(1)-0+a^2\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}w_f(x,t,\tau)\,d\tau=a^2\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}w_f(x,t,\tau)\,d\tau$$

$$u_{tt}(x,t)=a^2\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}w_f(x,t,t)}_{=f(x,t)\;;\;\tau=t}(1)-0+a^2\int_0^t\frac{\partial^2}{\partial t^2}w_f(x,t,\tau)\,d\tau=$$

$$=a^2 f(x,t)+a^2\int_0^t\frac{\partial^2}{\partial t^2}w_f(x,t,\tau)\,d\tau$$

$$u_{xx}(x,t)=a^2\int_0^t\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_f(x,t,\tau)\,d\tau=a^2\int_0^t\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}w_f(x,t,\tau)\,d\tau=\int_0^t\frac{\partial^2}{\partial t^2}w_f(x,t,\tau)\,d\tau$$

وبتبديل العلاقات (8) في المعادلة (1) يتضح أنَّ الدالة (7) تحقق المعادلة $[(1),(2)]$.

$$\frac{1}{a^2}u_{tt}=\frac{1}{a^2}\left[a^2 f(x,t)+a^2\int_0^t\frac{\partial^2}{\partial t^2}w_f(x,t,\tau)\,d\tau\right]=\int_0^t\frac{\partial^2}{\partial t^2}w_f(x,t,\tau)d\tau+f(x,t)$$

$$=u_{xx}+f(x,t)$$

من العلاقتين (6) و (7) ينتج مباشرة أنه يمكن التعبير عن حل المسألة $[(1),(2)]$ بالشكل:

$$u(x,t)=\frac{\partial w_\varphi(x,t,0)}{\partial t}+w_\psi(x,t,0)+a^2\int_0^t w_f(x,t,\tau)\,d\tau \quad \cdots\cdots\cdots(9)$$

وبالاستعانة بالصيغة (5) للدالة w_f نحصل على العلاقة:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{a}{2}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau \quad \cdots\cdot(10)$$

ومن ثمَّ العلاقة (10) هي حل المسألة (1) و (2)، وذلك بفرض أن المشتقات $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\psi'(x)$ ، $\varphi''(x)$ موجودة.

تطبيق: أوجد حل المسألة السابقة في حالة:

$$f(x,t)=\frac{1}{9}\sin x \quad , \quad a=3 \ , \ \varphi(x)=1 \ , \ \psi(x)=1$$

أي أن المطلوب: إيجاد حل معادلة الذبذبات الحرة للوتر غير المتجانسة:

$$\frac{1}{9}u_{tt}=u_{xx}+\frac{1}{9}\sin x \quad , \ (-\infty<x<+\infty \ , \ t>0) \ \cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية: $(2)\cdots\cdots\cdots \quad -\infty<x<+\infty \ , \ u_t(x,0)=1 \ , \ u(x,0)=1$

الحـل:

إن حل المسألة المعطاة يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{a}{2}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau \quad \cdots\cdot(3)$$

$$I_1=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+3t)+\varphi(x-3t)\right]=\frac{1}{2}[1+1]=1$$

$$I_2=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi=\frac{1}{2(3)}\int_{x-3t}^{x+3t}(1)d\xi=\frac{1}{6}\left[(x+3t)-(x-3t)\right]=t$$

$$I_3=\frac{a}{2}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau=\frac{3}{2}\int_0^t\left[\int_{x-3(t-\tau)}^{x+3(t-\tau)}\frac{1}{9}\sin\xi\,d\xi\right]d\tau=$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^t\left[-\cos\xi\Big|_{x-3(t-\tau)}^{x+3(t-\tau)}\right]d\tau=-\frac{1}{6}\int_0^t\left[\cos\xi\Big|_{x-3(t-\tau)}^{x+3(t-\tau)}\right]d\tau=$$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^t\left[\cos\left[x+3(t-\tau)\right]-\cos\left[x-3(t-\tau)\right]\right]d\tau=-\frac{1}{6}\int_0^t-2\sin x\,\sin\left[3(t-\tau)\right]d\tau$$

$$=\frac{1}{3}\sin x\int_0^t\sin\left[3(t-\tau)\right]d\tau=\frac{1}{3}\sin x\left[\frac{1}{3}\cos\left[3(t-\tau)\right]\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}\right]=\frac{1}{9}\sin x\left[1-\cos(3t)\right]$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في عبارة الحل (4) نجد أن الحل المطلوب هو:

$$\boxed{u(x,t)=1+t+\frac{1}{9}\sin x\left[1-\cos(3t)\right]}$$

❹**(الفصل الثاني للعام 2002 – 2003)**: لتكن لدينا معادلة الذبذبات الحرة للوتر:

$$\frac{1}{a^2}u_{tt}=u_{xx}+f(x,t)$$

والمطلوب:

1) أكتب حل هذه المعادلة والمحقق للشروط الابتدائية:

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x)\quad,\quad u_t\big|_{t=0}=\psi(x)$$

2) أوجد حل المسألة السابقة في حالة:

$$f(x,t)=xt\ ,\ a=2\ ,\ \varphi(x)=x^2\ ,\ \psi(x)=x$$

الحـل:

1) إن حل المسألة المعطاة يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{a}{2}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\quad\cdots(3)$$

2) إيجاد الحل المطلوب:

$$I_1=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+2t)+\varphi(x-2t)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[(x+2t)^2+(x-2t)^2\right]=x^2+4t^2$$

$$I_2=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi=\frac{1}{2(2)}\int_{x-2t}^{x+2t}(\xi)d\xi=\frac{1}{8}\left[\xi^2\right]_{x-2t}^{x+2t}=\frac{1}{8}\left[(x+2t)^2-(x-2t)^2\right]=xt$$

$$I_3=\frac{a}{2}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau=\frac{2}{2}\int_0^t\left[\int_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)}\xi\tau\,d\xi\right]d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\tau\left[\xi^2\right]_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\tau\left(8x(t-\tau)\right)d\tau=4x\int_0^t\tau(t-\tau)d\tau=4x\int_0^t\left(t\tau-\tau^2\right)d\tau=4x\left[\frac{1}{2}t\tau^2-\frac{\tau^3}{3}\right]_{\tau=0}^{\tau=t}=$$

$$=4x\left[\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{3}t^3\right]=4x\left[\frac{1}{6}t^3\right]=\frac{2}{3}xt^3$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في عبارة الحل (4) نجد أن الحل المطلوب هو:

$$\boxed{u(x,t)=x^2+4t^2+xt+\frac{2}{3}xt^3}$$

❺ المسألة الحدية المتجانسة بالشروط الحدية الصفرية:

أوجد حل المعادلة:

$$u_{tt}=a^2u_{xx} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

والموافق للشروط الابتدائية: $u(x,0)=\varphi(x)\ ,\ u_t(x,0)=\psi(x)\ \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية الصفرية: $u(0,t)=0\ ,\ u(\ell,t)=0\ \cdots\cdots\cdots(3)$

تطبيق: أوجد حل المعادلة السابقة في حالة:

$$a=1\ ,\ \ell=\pi\ ,\ \varphi(x)=\sin 3x\ ,\ \psi(x)=0$$

الحل: سوف نبحث عن حل مغاير للحل الصفري للمسألة الحدية من الشكل:

$$u(x,t)=X(x).T(t)\ ;\ X(x).T(t)\neq 0\ \cdots\cdots\cdots(4)$$

علماً أن $X(x)$ هي دالة تابعة لـ x فقط ، و $T(t)$ هي دالة تابعة لـ t فقط.

باشتقاق العلاقة (4) مرتين بالنسبة لـ x ، ومرتين بالنسبة لـ t نجد أنَّ:

$$u_{xx}=X''(x).T(t)$$
$$u_{tt}=X(x).T''(t)$$

نعوض في المعادلة (1) فنجد أنَّ:

$$X(x).T''(t)=a^2X''(x).T(t)$$

نقسم الطرفين على المقدار $a^2X(x).T(t)\neq 0$ فنحصل على:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}$$

بما أن الطرفين الأيمن والأيسر من العلاقة السابقة يحتفظان عند تغير متغيريهما بقيمة ثابتة، فإن العلاقة الأخيرة تكتب بالشكل:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

أي أن:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \quad , X(x)\neq 0 \cdots\cdots\cdots(5)$$
$$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0 \quad , T(t)\neq 0 \cdots\cdots\cdots(6)$$

مسألة القيم الذاتية:

من الشروط الحدية (3) نجد أنَّ:

$$0=u(0,t)=X(0).T(t) \Rightarrow X(0)=0 \; ; \; T(t)\neq 0$$
$$0=u(\ell,t)=X(\ell).T(t) \Rightarrow X(\ell)=0 \; ; \; T(t)\neq 0$$

ولنعين قيم λ التي يوجد عندها حل غير صفري للمسألة:

$$\left.\begin{array}{l} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X(\ell)=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots(7)$$

وهنا نميز ثلاث حالات:

حالة $\lambda<0$: أي أنَّ $-\lambda>0$ ، ومنه فإنَّ المعادلة المميزة للمعادلة (7) هي:

$$\rho^2+\lambda=0 \Rightarrow \rho^2=-\lambda \Rightarrow \rho=\mp\sqrt{-\lambda}$$

أي أن الجذور للمعادلة المميزة هي جذور حقيقية وعندها يعطى حل المسألة (7) بالشكل:

$$X(x)=c_1e^{-\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{\sqrt{-\lambda}x}$$

وبالاعتماد على الشروط الموافقة للمعادلة (7) نجد أنَّ:

$$0=X(0)=c_1+c_2 \Rightarrow \boxed{c_2=-c_1} \cdots\cdots\cdots(*)$$
$$0=X(\ell)=c_1e^{-\sqrt{-\lambda}\ell}+c_2e^{\sqrt{-\lambda}\ell} \cdots\cdots\cdots(**)$$

وبتعويض $(*)$ في $(**)$ نجد أنَّ:

$$c_1e^{-\sqrt{-\lambda}\ell}-c_1e^{\sqrt{-\lambda}\ell}=0 \Rightarrow c_1\left(e^{-\sqrt{-\lambda}\ell}-e^{\sqrt{-\lambda}\ell}\right)=0 \Rightarrow c_1=0$$

وبالتعويض في $(*)$ نجد أنَّ: $c_2=0$

وفي هذه الحالة تكون $X(x)=0$ وبالتالي $u(x,t)=0$، ولكننا نبحث عن حل مغاير للحل الصفري.

حالة $\lambda=0$: في هذه الحالة نجد أنَّ:

$$\left.\begin{array}{l} X''(x)=0 \\ X(0)=X(\ell)=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots(8)$$

بالمكاملة مرتين بالنسبة لـ x نجد أنَّ:

$$X(x)=c_1x+c_2$$

وبالاستفادة من الشروط الموافقة نجد أنَّ:

$$0=X(0)=c_1(0)+c_2 \Rightarrow \boxed{c_2=0}$$

وبالتعويض في الحل نجد أنَّ: $X(x)=c_1 x$

وبتطبيق الشرط الثاني نجد أنَّ:

$$0=X(\ell)=c_1(\ell) \Rightarrow \boxed{c_1=0}$$

وفي هذه الحالة تكون $X(x)=0$ وبالتالي $u(x,t)=0$، ولكننا نبحث عن حل مغاير للحل الصفري.

حالة $\lambda>0$: ومنه فإنَّ المعادلة المميزة للمعادلة (7) هي:

$$\rho^2+\lambda=0 \Rightarrow \rho^2=-\lambda \Rightarrow \rho=\mp i\sqrt{\lambda}$$

أي أن الجذور للمعادلة المميزة هي جذور عقدية وعندها يعطى حل المسألة (7) بالشكل:

$$X(x)=A\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)+B\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

وبالاعتماد على الشروط الموافقة للمعادلة (7) نجد أنَّ:

$$0=X(0)=A \cdots\cdots\cdots(*) \Rightarrow \boxed{A=0}$$

وبالتالي يصبح الحل بالشكل:

$$X(x)=B\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

وبتطبيق الشرط الثاني نجد أنَّ:

$$0=X(\ell)=B\sin\left(\sqrt{\lambda}\ell\right)$$

وبالتالي إما أن تكون $B=0$ وهنا نحصل على الصفري ، أو أن تكون:

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}\ell\right)=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\ell=n\pi \Rightarrow \sqrt{\lambda}=\frac{n\pi}{\ell}\ ,\ n=1,2,3,....$$

ومنه فإنَّ:

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2\ ;\ n=1,2,3,....$$

وبالتالي فإن :

$$X_n(x)=B_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

وبوضع $B_n=1$ نحصل على حلول للمعادلة (7) وغير صفرية هي:

$$X_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

وبتعويض $\lambda=\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$ في المعادلة (6) نجد أنَّ:

$$T''(t)+\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 T(t)=0$$

وبنفس الأسلوب السابق نجد أنَّ حل المعادلة الأخيرة هو:

$$T_n(t)=C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)$$

علماً أن C_n, D_n ثوابت اختيارية.

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في (4) نجد أنَّ:

$$u_n(x,t)=X_n(x).T_n(t)=\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\cdots\cdots\cdots(9)$$

إن الحلول (9) هي حلول خاصة للمعادلة (1) وتحقق الشروط الحدية(3) ، وبما أن المعادلة(1) خطية ومتجانسة فإن الحل العام لها هو مجموع الحلول الخاصة وبالتالي فإن:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\quad\cdots\cdots\cdots(10)$$

بقي علينا تحديد الثوابت D_n, C_n:

بالاستفادة من الشروط الابتدائية (2) نجد أنَّ:

تطبيق الشرط الأول:

$$\varphi(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\quad\Rightarrow\quad\boxed{C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi}$$

تطبيق الشرط الثاني:

$$u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{n\pi a}{\ell}C_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+\frac{n\pi a}{\ell}D_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

ومنه فإنَّ:

$$\psi(x)=u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{\ell}D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\ \Rightarrow\ \frac{n\pi a}{\ell}D_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi\ \Rightarrow$$

$$D_n=\frac{2\ell}{\ell n\pi a}\int_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi\ \Rightarrow\ \boxed{D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi}$$

وبالتالي نجد أن حل المسألة الحدية المتجانسة بالشروط الحدية الصفرية هو:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

علماً أنَّ:

$$C_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi \quad , \quad D_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

ملاحظة هامة: في حال كانت الشروط الحدية تعاني من اشتقاق أي معطاة بالشكل:

$$u(0,t)=0 \quad , u_x(\ell,t)=0$$

فإننا نستبدل في الحل السابق كل n بـ $\frac{2n+1}{2}$ والمجموع يبدأ من الصفر أي:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}x\right)$$

علماً أنَّ:

$$C_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\xi\right)d\xi \quad , \quad D_n = \frac{4}{(2n+1)\pi a}\int_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\xi\right)d\xi$$

حل التطبيق: وفقاً لمعطيات التطبيق تكون المعادلة بالشكل:

$$u_{tt}=u_{xx} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

والموافق للشروط الابتدائية: $u(x,0)=\sin 3x \quad , u_t(x,0)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية الصفرية: $u(0,t)=0 \ , \ u(\pi,t)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$

الحل: يعطى حل المسألة الحدية المتجانسة بالشروط الحدية الصفرية وفق الدستور التالي:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

علماً أنَّ:

$$C_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi \quad , \quad D_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

وبما أنَّ $\psi(x)=0$ فإنَّ $\psi(\xi)=0$ وبالتالي تكون $D_n=0$، وكما أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(3\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\xi\right)d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(3\xi)\sin(n\xi)d\xi=\frac{2}{\pi}\begin{cases}\frac{\pi}{2} \ ; \ n=3\\ 0 \ ; \ n\neq 3\end{cases} \Rightarrow$$

$$C_n=\begin{cases}1 \ ; \ n=3\\ 0 \ ; \ n\neq 3\end{cases}$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في صيغة الحل نجد أنَّ:

$$\boxed{u(x,t)=\cos(3t)\sin(3x)}$$

❻(الدورة الثالثة للعام 2013 – 2014)المعادلة غير المتجانسة للذبذبات حرة الوتر:

(35 درجة) أوجد حل المعادلة:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t)\quad ;\ 0<x<\ell\ ,\ t>0\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية: $u(x,0)=\varphi(x)\ ,\ u_t(x,0)=\psi(x)\ \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية الصفرية: $u(0,t)=0\quad ,\ u(\ell,t)=0\ \cdots\cdots\cdots(3)$

تطبيق: أوجد حل المسألة الحدية السابقة في حالة:

$$a=1,\ \ell=\pi\ ,\ f(x,t)=\frac{1}{2}\sin x\ \ ,\ \varphi(x)=\sin x\quad ,\ \psi(x)=0$$

الحـل: سوف نبحث عن حل للمعادلة (1) من الشكل:

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)\quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

حيث أنَّ $w(x,t)$ هو حل المعادلة المتجانسة للمعادلة (1) أي أنَّ:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

أما الدالـة $v(x,t)$ فهي عبارة عن حل خاص للمعادلـة (1) وتحقق الشروط الحديـة الصـفرية، والشروط الابتدائيـة الصفرية التالية:

$$v(x,0)=0\quad ,\ v_t(x,0)=0\quad ;\ 0\le x\le\ell\quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

وسنبحث عن الحل الخاص $v(x,t)$ على صورة تحليل في متسلسلة فورييه لـ x فنجد أنَّ:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

أي تتعين $v(x,t)$ إذا تعينت $T_n(t)$.

لنعبر عن الدوال التالية في صورة تحليل فورييه:

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\quad ;\ f_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(\xi,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\quad ;\ \varphi_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\quad ;\ \psi_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

الآن لنشتق العلاقة (5) فنجد:

$$v_{tt}=\sum_{n=1}^{\infty}T_n''(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\quad,\quad v_{xx}=\sum_{n=1}^{\infty}-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

ونعوض بعد الاشتقاق في المعادلة الأصلية (1) فنجد أنَّ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t)+\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 T_n(t)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

وبالمطابقة نجد أنَّ:

$$T_n''(t)+\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 T_n(t)=f_n(t)\quad\cdots\cdots\cdots(6)$$

للحصول على حل المعادلة (6) نعتمد الشروط في (4) " الشروط الابتدائية الصفرية" وعلى المعادلة (5) فنجد أنَّ الشروط الابتدائية الصفرية الجديدة:

$$\left.\begin{aligned} v(x,0)=0 &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)=0 \Rightarrow T_n(0)=0\\ v_t(x,0)=0 &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)=0 \Rightarrow T_n'(0)=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(7)$$

الآن لإيجاد حل المعادلة (6) نوجد حل المعادلة المتجانسة لها أولاً أي حل المعادلة:

$$T_n''(t)+\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 T_n(t)=0$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية وذات أمثال ثابتة وحلها العام هو:

$$T_n(t)=A_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+B_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\quad\cdots\cdots\cdots(8)$$

ولإيجاد الحل العام للمعادلة (6) نطبق طريقة تحويل الثوابت كما يلي:

$$A_n'\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+B_n'\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)=0$$

$$-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)A_n'\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)B_n'\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)=f_n(t)$$

وبالحل المشترك للمعادلتين السابقتين ومن ثم المكاملة نجد أنَّ:

$$A_n=-\left(\frac{\ell}{n\pi a}\right)\int_0^t f_n(\tau)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}a\tau\right)d\tau+\overline{A_n}$$

$$B_n=\left(\frac{\ell}{n\pi a}\right)\int_0^t f_n(\tau)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}a\tau\right)d\tau+\overline{B_n}$$

حيث أنَّ $\overline{A_n}\,,\,\overline{B_n}$ ثوابت التكامل.

وبتعويض قيم A_n , B_n في عبارة الحل (8) فنجد أنَّ:

$$T_n(t)=\left[-\left(\frac{\ell}{n\pi a}\right)\int_0^t f_n(\tau)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}a\tau\right)d\tau+\overline{A_n}\right]\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+$$
$$+\left[\left(\frac{\ell}{n\pi a}\right)\int_0^t f_n(\tau)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}a\tau\right)d\tau+\overline{B_n}\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)$$

ومن الشروط (7) نجد أنَّ:

$$0=T_n(0)=\overline{A_n}\ \Rightarrow \overline{A_n}=0$$
$$0=T_n'(0)=\overline{B_n}\Rightarrow \overline{B_n}=0$$

وبالتالي نجد أنَّ:

$$T_n(t)=\left[-\left(\frac{\ell}{n\pi a}\right)\int_0^t f_n(\tau)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}a\tau\right)d\tau\right]\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+$$
$$+\left[\left(\frac{\ell}{n\pi a}\right)\int_0^t f_n(\tau)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}a\tau\right)d\tau\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)=$$
$$=\left(\frac{\ell}{n\pi a}\right)\int_0^t f_n(\tau)\left[\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}a\tau\right)-\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}a\tau\right)\right]d\tau=$$
$$=\left(\frac{\ell}{n\pi a}\right)\int_0^t f_n(\tau)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}a(t-\tau)\right)d\tau$$

وبالتالي نجد أنَّ:

$$T_n(t)=\frac{\ell}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}a(t-\tau)\right)d\tau$$

وبهذا نكون قد أوجدنا $T_n(t)$ وبالتالي فإن $v(x,t)$ قد تعيَّنت، وبالتالي فإنَّ حل المسألة الحدية (1) هو التالي:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi \quad , \quad D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$
$$T_n(t)=\frac{\ell}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}a(t-\tau)\right)d\tau$$
$$f_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(\xi,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

حل التطبيق: لدينا:

$$u_{tt}=u_{xx}+\frac{1}{2}\sin x \quad ; \ 0<x<\pi \ , \ t>0 \ \cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية:

$$u(x,0)=\sin x \quad , \ u_t(x,0)=0 \ \cdots\cdots\cdots(2)$$

والشروط الحدية الصفرية:

$$u(0,t)=0 \quad , \ u(\pi,t)=0 \ \cdots\cdots\cdots(3)$$

الحل: إن المسألة الحدية المعطاة هي مسألة حدية غير متجانسة بشروط حدية صفرية وفيها:

$$a=1, \ \ell=\pi \ , \ f(x,t)=\frac{1}{2}\sin x \ , \ \varphi(x)=\sin x \ , \ \psi(x)=0$$

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \ \cdots\cdots(4)$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi \quad , \quad D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

$$T_n(t)=\frac{\ell}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}a(t-\tau)\right)d\tau$$

$$f_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(\xi,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

وبما أن $\psi(x)=0$ فإنَّ $\psi(\xi)=0$ وبالتالي فإنَّ $D_n=0$، وكما أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\xi\sin(n\xi)d\xi=\frac{2}{\pi}\begin{cases}\frac{\pi}{2} \ ; n=1\\ 0 \ ; n\neq 1\end{cases} \Rightarrow C_n=\begin{cases}1 \ ; n=1\\ 0 \ ; n\neq 1\end{cases}$$

وأيضاً فإنَّ:

$$f_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin\xi\sin(n\xi)d\xi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\xi\sin(n\xi)d\xi=\frac{1}{\pi}\begin{cases}\frac{\pi}{2} \ ; n=1\\ 0 \ ; n\neq 1\end{cases} \Rightarrow f_n(t)=\begin{cases}\frac{1}{2} \ ; n=1\\ 0 \ ; n\neq 1\end{cases}$$

وبما أن $f_n(t)=0 \ ; \ n\neq 1$ فإنَّ $T_n(t)=0 \ ; \ n\neq 1$ ومنه فإنَّ:

$$T_1(t)=\frac{\pi}{(1)\pi(1)}\int_0^t f_1(\tau)\sin\left(\frac{(1)\pi}{\pi}(1)(t-\tau)\right)d\tau=\int_0^t\frac{1}{2}\sin(t-\tau)\,d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\sin(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos(t-\tau)\right]_0^t=\frac{1}{2}(1-\cos t)$$

وبالتالي أصبح لدينا:

$$T_n(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-\cos t) & ; \ n=1\\ 0 & ; \ n\neq 1\end{cases}$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في صيغة الحل العام (4) نجد أن:

$$u(x,t)=\cos t\sin x+\frac{1}{2}(1-\cos t)\sin x \Rightarrow u(x,t)=\frac{1}{2}\sin x\left[2\cos t+1-\cos t\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2}\sin x\,(1+\cos t)}$$

❼(الفصل الأول للعام $2013-2014$) المسألة العامة الحدية الأولى لمعادلة الذبذبات الحرة للوتر:

(30 درجة) حوِّل المسألة العامة الحديِّة الأولى لمعادلة الذبذبات الحرة للوتر:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t) \quad ; \quad 0<x<\ell \ , \ t>0 \ \cdots\cdots\cdots(1)$$

مع الشروط الابتدائية: $u(x,0)=\varphi(x) \ , \ u_t(x,0)=\psi(x) \ ; \ 0\le x\le \ell \ \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية غير المتجانسة: $u(0,t)=\mu_1(t) \ , \ u(\ell,t)=\mu_2(t) \ ; \ t\ge 0 \ \cdots\cdots\cdots(3)$

إلى مسألة حدية مع شروط حدية صفرية، ثم أكتب عبارة حل المسألة الناتجة عن هذا التحويل.

تطبيق: أوجد حل المسألة الحدية السابقة في حالة: $f(x,t)=-4\sin 2t+4\sin x$

$$a=2 \ , \ \ell=\pi \ , \ \varphi(x)=0 \ , \ \psi(x)=2+\sin 2x \ , \ \mu_1(t)=\mu_2(t)=\sin 2t$$

الحـل:

سوف نبحث عن حل من الشكل:

$$u(x,t)=U(x,t)+v(x,t) \ \cdots\cdots\cdots(4)$$

علماً أن $v(x,t)$ دالة مجهولة جديدة وهي عبارة عن انحراف الدالة $u(x,t)$ عن دالة معلومة $U(x,t)$

نشتق الحل (4) مرتين بالنسبة لـ t ومرتين بالنسبة لـ x فنجد أنَّ:

$$u_t=U_t+v_t \Rightarrow u_{tt}=U_{tt}+v_{tt}$$
$$u_x=U_x+v_x \Rightarrow u_{xx}=U_{xx}+v_{xx}$$

وبالتعويض في (1) و (2) و (3) على الترتيب نجد:

$$U_{tt}+v_{tt}=a^2(U_{xx}+v_{xx})+f(x,t) \Rightarrow v_{tt}=a^2v_{xx}+\left[f(x,t)-\left(U_{tt}-a^2U_{xx}\right)\right] \Rightarrow$$

$$v_{tt}=a^2v_{xx}+\bar{f}(x,t) \ \cdots\cdots\cdots(1')$$

وتصبح الشروط الابتدائية الجديدة بالشكل:

$$\varphi(x)=u(x,0)=U(x,0)+v(x,0) \Rightarrow v(x,0)=\varphi(x)-U(x,0)=\bar{\varphi}(x)$$
$$\psi(x)=u_t(x,0)=U_t(x,0)+v_t(x,0) \Rightarrow v_t(x,0)=\psi(x)-U_t(x,0)=\bar{\psi}(x)$$

وبالتالي فالشروط الابتدائية الجديدة هي:

$$v(x,0)=\overline{\varphi}(x)\ ,\ v_t(x,0)=\overline{\psi}(x)\ \cdots\cdots\cdots(2')$$

تحديد الشروط الحدية الجديدة:

$$\mu_1(t)=u(0,t)=U(0,t)+v(0,t)\ \Rightarrow\ v(0,t)=\mu_1(t)-U(0,t)=\overline{\mu_1}(t)$$

$$\mu_2(t)=u(\ell,t)=U(\ell,t)+v(\ell,t)\ \Rightarrow\ v(\ell,t)=\mu_2(t)-U(\ell,t)=\overline{\mu_2}(t)$$

نختار الدالة $U(x,t)$ بحيث تصبح الشروط الحدية الجديدة صفرية أي بحيث يتحقق:

$$\overline{\mu_1}(t)=0\ ,\ \overline{\mu_2}(t)=0$$

ولهذا يكون الاختيار هو:

$$U(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{\ell}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]\ \cdots\cdots\cdots(5)$$

اذاً أصبحت المسألة الحدية الجديدة هي مسألة حدية غير متجانسة بشروط حدية صفرية ونكتبها على الشكل:

$$v_{tt}=a^2v_{xx}+\overline{f}(x,t)\ \cdots\cdots\cdots(1')$$

مع الشروط الابتدائية: $v(x,0)=\overline{\varphi}(x)\ ,\ v_t(x,0)=\overline{\psi}(x)\ \cdots\cdots\cdots(2')$

والشروط الحدية الصفرية: $v(0,t)=0\ ,\ v(\ell,t)=0\ \cdots\cdots\cdots(3')$

وحل هذه المسألة الحدية الجديدة يعطى بالدستور التالي:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\cdots\cdots\cdots(4')$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\varphi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi\ \ ,\ \ D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\overline{\psi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

$$T_n(t)=\frac{\ell}{n\pi a}\int_0^{t}\overline{f_n}(\tau)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}a(t-\tau)\right)d\tau$$

$$\overline{f_n}(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{f}(\xi,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

بتعويض العلاقتين $(4')$ و (5) في العلاقة (4) نحصل على عبارة الحل العام للمسألة الحدية المعطاة.

ملاحظة هامة:

إذا أعطيت الشروط الحدية بالشكل:

$$u(0,t)=\mu_1(t)\ ,\ u_x(\ell,t)=\mu_2(t)$$

عندئذٍ نختار الدالة $U(x,t)$ بالشكل:

$$U(x,t)=\mu_1(t)+x\,\mu_2(t)$$

حل التطبيق: إن المسألة الحدية المعطاة هي:

$$u_{tt}=4u_{xx}-4\sin 2t+4\sin x \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

مع الشروط الابتدائية: $u(x,0)=0 \quad , \quad u_t(x,0)=2+\sin 2x \quad \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية غير المتجانسة: $u(0,t)=\sin 2t \quad , \quad u(\pi,t)=\sin 2t \quad \cdots\cdots\cdots(3)$

الحـل: إن المسألة الحدية المعطاة هي مسألة حدية غير متجانسة بشروط حدية غير صفرية وفيها:

$$a=2 \; , \; \ell=\pi \; , \; f(x,t)=-4\sin 2t+4\sin x$$

$$\varphi(x)=0 \; , \; \psi(x)=2+\sin 2x$$

$$\mu_1(t)=\mu_2(t)=\sin 2t$$

وحلها يعطى بالدستور التالي: $u(x,t)=U(x,t)+v(x,t) \quad \cdots\cdots\cdots(4)$

علماً أنَّ:

$$U(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{\ell}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]=\sin 2t+\frac{x}{\pi}\left[\sin 2t-\sin 2t\right]=\sin 2t \;\Rightarrow$$

$$\boxed{U(x,t)=\sin 2t} \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

$$U_t(x,t)=2\cos 2t \quad , \quad U_{tt}(x,t)=-4\sin 2t \quad , \quad U_{xx}(x,t)=0$$

$$U(x,0)=0 \quad , \quad U_t(x,0)=2$$

أما $v(x,t)$ فهي حل للمسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=a^2v_{xx}+\bar{f}(x,t)$$

مع الشروط الابتدائية: $v(x,0)=\bar{\varphi}(x) \; , \; v_t(x,0)=\bar{\psi}(x)$

والشروط الحدية الصفرية: $v(0,t)=0 \quad , \quad v(\ell,t)=0$

علماً أنَّ:

$$\bar{f}(x,t)=f(x,t)-\left(U_{tt}-a^2U_{xx}\right)=-4\sin 2t+4\sin x-\left[-4\sin 2t-4(0)\right]=4\sin x$$

$$\bar{\varphi}(x)=\varphi(x)-U(x,0)=0-0=0$$

$$\bar{\psi}(x)=\psi(x)-U_t(x,0)=2+\sin 2x-2=\sin 2x$$

وبالتالي فإنَّ $v(x,t)$ هي حل للمسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=4v_{xx}+4\sin x \quad \cdots\cdots\cdots(1')$$

مع الشروط الابتدائية: $v(x,0)=0 \; , \; v_t(x,0)=\sin 2x \quad \cdots\cdots\cdots(2')$

والشروط الحدية الصفرية: $v(0,t)=0 \quad , \quad v(\pi,t)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(3')$

وحل هذه المسألة الحدية الجديدة يعطى بالدستور التالي:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\cdots\cdots\cdots(4')$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\varphi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi \quad , \quad D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\overline{\psi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

$$T_n(t)=\frac{\ell}{n\pi a}\int_0^{t}\overline{f_n}(\tau)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}a(t-\tau)\right)d\tau$$

$$\overline{f_n}(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{f}(\xi,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

بما أن $\overline{\varphi}(x)=0$ فإنَّ $\overline{\varphi}(\xi)=0$ وبالتالي فإنَّ $C_n=0$ ، وكما أن:

$$D_n=\frac{2}{n\pi(2)}\int_0^{\pi}\sin(2\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\xi\right)d\xi=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(2\xi)\sin(n\xi)d\xi=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{2} \ ; \ n=2\\ 0 \ ; \ n\neq 2\end{cases}\Rightarrow$$

$$D_n=\begin{cases}\frac{1}{4} \ ; \ n=2\\ 0 \ ; \ n\neq 2\end{cases}$$

وأيضاً:

$$\overline{f_n}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}4\sin\xi\,\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\xi\right)d\xi=\frac{8}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\xi\,\sin(n\xi)d\xi=\frac{8}{\pi}\begin{cases}\frac{\pi}{2} \ ; \ n=1\\ 0 \ ; \ n\neq 1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\overline{f_n}(t)=\begin{cases}4 \ ; \ n=1\\ 0 \ ; \ n\neq 1\end{cases}$$

وبما أنَّ $f_n(t)=0$ من أجل $n\neq 1$ فإنَّ $T_n(t)=0$ من أجل $n\neq 1$ وبالتالي فإنَّ:

$$T_1(t)=\frac{\pi}{(1)\pi(2)}\int_0^{t}(4)\sin\left[\frac{(1)\pi}{\pi}(2)(t-\tau)\right]d\tau=\int_0^{t}2\sin\left[2(t-\tau)\right]d\tau=$$

$$=\left[\cos 2(t-\tau)\right]_0^{t}=1-\cos 2t$$

وبالتالي نجد أنَّ:

$$T_n(t)=\begin{cases}1-\cos 2t \ ; \ n=1\\ 0 \ ; \ n\neq 1\end{cases}$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في عبارة الحل للمسألة الجديدة $(4')$ نجد أنَّ:

$$v(x,t)=\frac{1}{4}\sin 4t\sin 2x+(1-\cos 2t)\sin x \quad \cdots\cdots\cdots(5')$$

بتعويض العلاقتين $(5')$ و (5) في العلاقة (4) نحصل على عبارة الحل العام للمسألة الحدية المعطاة:

$$\boxed{u(x,t)=\sin 2t+\frac{1}{4}\sin 4t\sin 2x+(1-\cos 2t)\sin x}$$

❽**(الفصل الثاني للعام 2012 – 2013)** أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية:

$$u_{tt}=4u_{xx}+\sin 2x-4\sin 2t \;,\; 0<x<\pi \;,\; t>0 \cdots\cdots\cdots(1)$$

مع الشروط الابتدائية: $u(x,0)=\sin x \quad , \quad u_t(x,0)=2 \quad , 0\le x\le\pi \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية غير المتجانسة: $u(0,t)=\sin 2t \quad , \quad u(\pi,t)=\sin 2t \quad , t\ge 0 \cdots\cdots\cdots(3)$

الحـل: إن المسألة الحدية المعطاة هي مسألة حدية غير متجانسة بشروط حدية غير صفرية وفيها:

$$a=2 \;,\; \ell=\pi \;,\; f(x,t)=\sin 2x-4\sin 2t$$
$$\varphi(x)=\sin x \;,\; \psi(x)=2$$
$$\mu_1(t)=\mu_2(t)=\sin 2t$$

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=U(x,t)+v(x,t) \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

علماً أنَّ:

$$U(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{\ell}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]=\sin 2t+\frac{x}{\pi}\left[\sin 2t-\sin 2t\right]=\sin 2t \Rightarrow$$

$$\boxed{U(x,t)=\sin 2t} \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

$$U_t(x,t)=2\cos 2t \;,\; U_{tt}(x,t)=-4\sin 2t \;,\; U_{xx}(x,t)=0$$
$$U(x,0)=0 \;,\; U_t(x,0)=2$$

أما $v(x,t)$ فهي حل للمسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=a^2v_{xx}+\overline{f}(x,t)$$

مع الشروط الابتدائية: $v(x,0)=\overline{\varphi}(x) \;,\; v_t(x,0)=\overline{\psi}(x)$

والشروط الحدية الصفرية: $v(0,t)=0 \quad , \quad v(\ell,t)=0$

علماً أنَّ:

$$\overline{f}(x,t)=f(x,t)-\left(U_{tt}-a^2U_{xx}\right)=\sin 2x-4\sin 2t-\left[-4\sin 2t-4(0)\right]=\sin 2x$$

$$\overline{\varphi}(x)=\varphi(x)-U(x,0)=\sin x-0=\sin x$$

$$\overline{\psi}(x)=\psi(x)-U_t(x,0)=2-2=0$$

وبالتالي فإنَّ $v(x,t)$ هي حل للمسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=4v_{xx}+\sin 2x \quad \cdots\cdots\cdots(1')$$

مع الشروط الابتدائية: $v(x,0)=\sin x \;\;,\;\; v_t(x,0)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(2')$

والشروط الحدية الصفرية: $v(0,t)=0 \quad , \quad v(\pi,t)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(3')$

وحل هذه المسألة الحدية الجديدة يعطى بالدستور التالي:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\cdots\cdots\cdots(4')$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\varphi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi \quad , \quad D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\overline{\psi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

$$T_n(t)=\frac{\ell}{n\pi a}\int_0^{t}\overline{f_n}(\tau)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}a(t-\tau)\right)d\tau$$

$$\overline{f_n}(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{f}(\xi,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

بما أن $\overline{\psi}(x)=0$ فإنَّ $\overline{\psi}(\xi)=0$ وبالتالي فإنَّ $D_n=0$.

وكما أن:

$$C_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\xi\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\xi\right)d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(\xi)\sin(n\xi)d\xi=\frac{2}{\pi}\begin{cases}\frac{\pi}{2}\;;\; n=1\\ 0\;;\; n\neq 1\end{cases}\Rightarrow C_n=\begin{cases}1\;;\; n=1\\ 0\;;\; n\neq 1\end{cases}$$

وأيضاً:

$$\overline{f_n}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(2\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\xi\right)d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(2\xi)\sin(n\xi)d\xi=\frac{2}{\pi}\begin{cases}\frac{\pi}{2}\;;\; n=2\\ 0\;;\; n\neq 2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\overline{f_n}(t)=\begin{cases}1\;;\; n=2\\ 0\;;\; n\neq 2\end{cases}$$

وبما أنَّ $f_n(t)=0$ من أجل $n\neq 2$ فإنَّ $T_n(t)=0$ من أجل $n\neq 2$ وبالتالي فإنَّ:

$$T_2(t)=\frac{\pi}{(2)\pi(2)}\int_0^t(1)\sin\left[\frac{(2)\pi}{\pi}(2)(t-\tau)\right]d\tau=\frac{1}{4}\int_0^t\sin 4(t-\tau)\,d\tau=$$
$$=\frac{1}{16}\left[\cos 4(t-\tau)\right]_0^t=\frac{1}{16}\left[1-\cos 4t\right]$$

وبالتالي نجد أنَّ:

$$T_n(t)=\begin{cases}\frac{1}{16}\left[1-\cos 4t\right]\ ;\ n=2\\ 0\ ;\ n\neq 2\end{cases}$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في عبارة الحل للمسألة الجديدة $(4')$ نجد أنَّ:

$$v(x,t)=\cos 2t\sin x+\frac{1}{16}(1-\cos 4t)\sin 2x\quad\cdots\cdots\cdots(5')$$

بتعويض العلاقتين $(5')$ و (5) في العلاقة (4) نحصل على عبارة الحل العام للمسألة الحدية المعطاة:

$$\boxed{u(x,t)=\sin 2t+\cos 2t\sin x+\frac{1}{16}(1-\cos 4t)\sin 2x}$$

❾**(الفصل الثاني للعام 2014 – 2015)** أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية:

$$u_{tt}=u_{xx}+6\sin 3t\sin 3x-4\sin 2t\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

مع الشروط الابتدائية: $u(x,0)=\sin 3x\quad,\ u_t(x,0)=2\quad\cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية غير المتجانسة: $u(0,t)=2\sin t\cos t\quad,\ u(\pi,t)=\sin 2t\quad\cdots\cdots\cdots(3)$

الحــل: إن المسألة الحدية المعطاة هي مسألة حدية غير متجانسة بشروط حدية غير صفرية وفيها:

$$a=1\ ,\ \ell=\pi\ ,\quad f(x,t)=6\sin 3t\sin 3x-4\sin 2t$$
$$\varphi(x)=\sin 3x\ ,\ \psi(x)=2$$
$$\mu_1(t)=2\sin t\cos t=\sin 2t\ ,\ \mu_2(t)=\sin 2t$$

وحلها يعطى بالدستور التالي: $u(x,t)=U(x,t)+v(x,t)\quad\cdots\cdots\cdots(4)$

علماً أنَّ:

$$U(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{\ell}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]=\sin 2t+\frac{x}{\pi}\left[\sin 2t-\sin 2t\right]=\sin 2t\ \Rightarrow$$

$$\boxed{U(x,t)=\sin 2t}\quad\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$U_t(x,t)=2\cos 2t\quad,\ U_{tt}(x,t)=-4\sin 2t\ ,\ U_{xx}(x,t)=0$$
$$U(x,0)=0\quad,\ U_t(x,0)=2$$

أما $v(x,t)$ فهي حل للمسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=a^2v_{xx}+\overline{f}\,(x,t)$$

مع الشروط الابتدائية: $v\,(x,0)=\overline{\varphi}(x)\ ,\ v_t\,(x,0)=\overline{\psi}(x)$

والشروط الحدية الصفرية: $v\,(0,t)=0\quad ,\quad v\,(\ell,t)=0$

علماً أنَّ:

$$\overline{f}\,(x,t)=f\,(x,t)-\left(U_{tt}-a^2U_{xx}\right)=$$
$$=6\sin 3t\sin 3x-4\sin 2t-\left[-4\sin 2t-1(0)\right]=6\sin 3t\sin 3x$$
$$\overline{\varphi}(x)=\varphi(x)-U\,(x,0)=\sin 3x-0=\sin 3x$$
$$\overline{\psi}(x)=\psi(x)-U_t\,(x,0)=2-2=0$$

وبالتالي فإنَّ $v\,(x,t)$ هي حل للمسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=v_{xx}+6\sin 3t\sin 3x\quad\cdots\cdots\cdots(1')$$

مع الشروط الابتدائية: $v\,(x,0)=\sin 3x\ ,\ v_t\,(x,0)=0\quad\cdots\cdots\cdots(2')$

والشروط الحدية الصفرية: $v\,(0,t)=0\quad ,\quad v\,(\pi,t)=0\quad\cdots\cdots\cdots(3')$

وحل هذه المسألة الحدية الجديدة يعطى بالدستور التالي:

$$v\,(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n\,(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\cdots\cdots\cdots(4')$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\varphi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi\quad ,\quad D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\overline{\psi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$
$$T_n\,(t)=\frac{\ell}{n\pi a}\int_0^{t}\overline{f_n}\,(\tau)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}a\,(t-\tau)\right)d\tau$$
$$\overline{f_n}\,(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{f}\,(\xi,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

بما أن $\overline{\psi}(x)=0$ فإنَّ $\overline{\psi}(\xi)=0$ وبالتالي فإنَّ $D_n=0$ ، وكما أن:

$$C_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(3\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\xi\right)d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(3\xi)\sin(n\xi)d\xi=\frac{2}{\pi}\begin{cases}\frac{\pi}{2}\ ;\ n=3\\ 0\ ;\ n\neq 3\end{cases}\Rightarrow$$

$$C_n=\begin{cases}1\ ;\ n=3\\ 0\ ;\ n\neq 3\end{cases}$$

وأيضاً:

$$\overline{f_n}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 6\sin 3t\sin(3\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\xi\right)d\xi=\frac{12}{\pi}\sin 3t\int_0^{\pi}\sin(3\xi)\sin(n\xi)d\xi=$$

$$=\frac{12}{\pi}\sin 3t\begin{cases}\frac{\pi}{2}\ ;\ n=3\\ 0\ ;\ n\neq 3\end{cases}\Rightarrow\ \overline{f_n}(t)=\begin{cases}6\sin 3t\ ;\ n=3\\ 0\ ;\ n\neq 3\end{cases}$$

وبما أنَّ $f_n(t)=0$ من أجل $n\neq 3$ فإنَّ $T_n(t)=0$ من أجل $n\neq 3$ وبالتالي فإنَّ:

$$T_3(t)=\frac{\pi}{(3)\pi(1)}\int_0^t\sin\left[\frac{(3)\pi}{\pi}(1)(t-\tau)\right]6\sin(3\tau)d\tau=\int_0^t 2\sin\left[3(t-\tau)\right]\sin(3\tau)\,d\tau=$$

$$=-\int_0^t\left[\cos[3t-3\tau+3\tau]-\cos[3t-3\tau-3\tau]\right]d\tau=-\int_0^t\left[\cos(3t)-\cos(3t-6\tau)\right]d\tau=$$

$$=-\cos(3t)\int_0^t d\tau+\int_0^t\cos(3t-6\tau)d\tau=-t\cos(3t)-\frac{1}{6}\sin(3t-6\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}$$

$$=-t\cos(3t)-\frac{1}{6}\left[\sin(-3t)-\sin(3t)\right]=-t\cos(3t)+\frac{1}{3}\sin(3t)$$

وبالتالي نجد أنَّ:

$$T_n(t)=\begin{cases}\frac{1}{3}\sin(3t)-t\cos(3t)\,;\ n=3\\ 0\ ;\ n\neq 3\end{cases}$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في عبارة الحل للمسألة الجديدة $(4')$ نجد أنَّ:

$$v(x,t)=\cos 3t\sin 3x+\left[\frac{1}{3}\sin(3t)-t\cos(3t)\right]\sin 3x=$$

$$=\left[\cos 3t+\frac{1}{3}\sin(3t)-t\cos(3t)\right]\sin 3x\quad\Rightarrow$$

$$v(x,t)=\left[\frac{1}{3}\sin(3t)+(1-t)\cos(3t)\right]\sin 3x\quad\cdots\cdots\cdots(5')$$

بتعويض العلاقتين $(5')$ و (5) في العلاقة (4) نحصل على عبارة الحل العام للمسألة الحدية المعطاة:

$$\boxed{u(x,t)=\sin 2t+\left[\frac{1}{3}\sin(3t)+(1-t)\cos(3t)\right]\sin 3x}$$

⓾**(الفصل الثاني للعام 2010 – 2011)** أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية:

$$u_{tt}=u_{xx}+\sin x\sin t\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

مع الشروط الابتدائية: $u(x,0)=\frac{x}{\pi}\ ,\ u_t(x,0)=1+\sin x\quad\cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية غير المتجانسة: $u(0,t)=t\ ,\ u(\pi,t)=t+1\quad\cdots\cdots\cdots(3)$

الحــل:

إن المسألة الحدية المعطاة هي مسألة حدية غير متجانسة بشروط حدية غير صفرية وفيها:

$$a=1\ ,\ \ell=\pi\ ,\ \ f(x,t)=\sin x\sin t$$

$$\varphi(x)=\frac{x}{\pi}\ ,\ \psi(x)=1+\sin x$$

$$\mu_1(t)=t\ ,\ \mu_2(t)=t+1$$

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=U(x,t)+v(x,t)\ \cdots\cdots\cdots(4)$$

علماً أنَّ:

$$U(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{\ell}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]=t+\frac{x}{\pi}[t+1-t]=t+\frac{x}{\pi}\ \Rightarrow$$

$$\boxed{U(x,t)=t+\frac{x}{\pi}}\ \cdots\cdots\cdots(5)$$

$$U_t(x,t)=1\ ,\ U_{tt}(x,t)=0\ ,\ U_{xx}(x,t)=0$$

$$U(x,0)=\frac{x}{\pi}\ ,\ U_t(x,0)=1$$

أما $v(x,t)$ فهي حل للمسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=a^2v_{xx}+\overline{f}(x,t)$$

مع الشروط الابتدائية: $v(x,0)=\overline{\varphi}(x)\ ,\ v_t(x,0)=\overline{\psi}(x)$

والشروط الحدية الصفرية: $v(0,t)=0\ \ ,\ \ v(\ell,t)=0$

علماً أنَّ:

$$\overline{f}(x,t)=f(x,t)-\left(U_{tt}-a^2U_{xx}\right)=$$

$$=\sin x\sin t-\left[0-1(0)\right]=\sin x\sin t$$

$$\overline{\varphi}(x)=\varphi(x)-U(x,0)=\frac{x}{\pi}-\frac{x}{\pi}=0$$

$$\overline{\psi}(x)=\psi(x)-U_t(x,0)=1+\sin x-1=\sin x$$

وبالتالي فإنَّ $v(x,t)$ هي حل للمسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=v_{xx}+\sin x\sin t\ \cdots\cdots\cdots(1')$$

مع الشروط الابتدائية: $v(x,0)=0\ ,\ v_t(x,0)=\sin x\ \cdots\cdots\cdots(2')$

والشروط الحدية الصفرية: $v(0,t)=0\ \ ,\ \ v(\pi,t)=0\ \cdots\cdots\cdots(3')$

وحل هذه المسألة الحدية الجديدة يعطى بالدستور التالي:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\cdots\cdots\cdots(4')$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\varphi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi \quad , \quad D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\overline{\psi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

$$T_n(t)=\frac{\ell}{n\pi a}\int_0^{t}\overline{f_n}(\tau)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}a(t-\tau)\right)d\tau$$

$$\overline{f_n}(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{f}(\xi,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

بما أن $\overline{\varphi}(x)=0$ فإنَّ $\overline{\varphi}(\xi)=0$ وبالتالي فإنَّ $C_n=0$.

وكما أن:

$$D_n=\frac{2}{n\pi(1)}\int_0^{\pi}\sin(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\xi\right)d\xi=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(\xi)\sin(n\xi)d\xi=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\ ;\ n=1\\ 0\ ;\ n\neq 1\end{cases}\Rightarrow$$

$$D_n=\begin{cases}1\ ;\ n=1\\ 0\ ;\ n\neq 1\end{cases}$$

وأيضاً:

$$\overline{f_n}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\,\sin(\xi)\,\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\xi\right)d\xi=\frac{2}{\pi}\sin t\int_0^{\pi}\sin(\xi)\,\sin(n\xi)d\xi=$$

$$=\frac{2}{\pi}\sin t\begin{cases}\frac{\pi}{2}\ ;\ n=1\\ 0\ ;\ n\neq 1\end{cases}\Rightarrow\ \overline{f_n}(t)=\begin{cases}\sin t\ ;\ n=1\\ 0\ ;\ n\neq 1\end{cases}$$

وبما أنَّ $f_n(t)=0$ من أجل $n\neq 1$ فإنَّ $T_n(t)=0$ من أجل $n\neq 1$ وبالتالي فإنَّ:

$$T_1(t)=\frac{\pi}{(1)\pi(1)}\int_0^{t}\sin\left[\frac{(1)\pi}{\pi}(1)(t-\tau)\right]\sin(\tau)d\tau=\int_0^{t}\sin[(t-\tau)]\sin(\tau)\,d\tau=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{t}\left[\cos[t-\tau+\tau]-\cos[t-\tau-\tau]\right]d\tau=-\frac{1}{2}\int_0^{t}\left[\cos(t)-\cos(t-2\tau)\right]d\tau=$$

$$=-\frac{1}{2}\cos(t)\int_0^{t}d\tau+\frac{1}{2}\int_0^{t}\cos(t-2\tau)d\tau=-\frac{1}{2}t\cos(t)-\frac{1}{4}\sin(t-2\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}$$

$$=-\frac{1}{2}t\cos(t)-\frac{1}{4}\left[\sin(-t)-\sin(t)\right]=-\frac{1}{2}t\cos(t)+\frac{1}{2}\sin(t)=\frac{1}{2}\left[\sin(t)-t\cos(t)\right]$$

وبالتالي نجد أنَّ:

$$T_n(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[\sin(t)-t\cos(t)\right]\ ;\ n=1\\ 0\ ;\ n\neq 1\end{cases}$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في عبارة الحل للمسألة الجديدة $(4')$ نجد أنَّ:

$$v(x,t)=\sin t\sin x+\frac{1}{2}\left[\sin(t)-t\cos(t)\right]\sin x=\frac{1}{2}\left[2\sin t+\sin t-t\cos t\right]\sin x\quad\Rightarrow$$

$$v(x,t)=\frac{1}{2}\left[3\sin t-t\cos t\right]\sin x\quad\cdots\cdots\cdots(5')$$

بتعويض العلاقتين $(5')$ و (5) في العلاقة (4) نحصل على عبارة الحل العام للمسألة الحدية المعطاة:

$$\boxed{u(x,t)=t+\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\left[3\sin t-t\cos t\right]\sin x}$$

❶❶**(الفصل الثاني للعام 2010 – 2011)** أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية:

$$u_{tt}=u_{xx}+\sin x\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

مع الشروط الابتدائية: $u(x,0)=1\ ,\ u_t(x,0)=x+\sin x\quad\cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية غير المتجانسة: $u(0,t)=1\ ,\ u(\pi,t)=1+\pi t\quad\cdots\cdots\cdots(3)$

الحـل: إن المسألة الحدية المعطاة هي مسألة حدية غير متجانسة بشروط حدية غير صفرية وفيها:

$$a=1\ ,\ \ell=\pi\ ,\ f(x,t)=\sin x$$

$$\varphi(x)=1\ ,\ \psi(x)=x+\sin x$$

$$\mu_1(t)=1\ ,\ \mu_2(t)=1+\pi t$$

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=U(x,t)+v(x,t)\quad\cdots\cdots\cdots(4)$$

علماً أنَّ:

$$U(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{\ell}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]=1+\frac{x}{\pi}\left[1+\pi t-1\right]=1+x\,t\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{U(x,t)=1+x\,t}\quad\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$U_t(x,t)=x\ ,\ U_{tt}(x,t)=0\ ,\ U_{xx}(x,t)=0$$

$$U(x,0)=1\ ,\ U_t(x,0)=x$$

أما $v(x,t)$ فهي حل للمسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=a^2 v_{xx}+\overline{f}\,(x,t)$$

مع الشروط الابتدائية: $v(x,0)=\overline{\varphi}(x)\ ,\ v_t(x,0)=\overline{\psi}(x)$

والشروط الحدية الصفرية: $v(0,t)=0\quad ,\quad v(\ell,t)=0$

علماً أنَّ:

$$\overline{f}\,(x,t)=f\,(x,t)-\left(U_{tt}-a^2U_{xx}\right)=$$
$$=\sin x-\left[0-1(0)\right]=\sin x$$
$$\overline{\varphi}(x)=\varphi(x)-U\,(x,0)=1-1=0$$
$$\overline{\psi}(x)=\psi(x)-U_t\,(x,0)=x+\sin x-x=\sin x$$

وبالتالي فإنَّ $v\,(x,t)$ هي حل للمسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=v_{xx}+\sin x\quad\cdots\cdots\cdots(1')$$

مع الشروط الابتدائية: $v\,(x,0)=0\ ,\ v_t\,(x,0)=\sin x\quad\cdots\cdots\cdots(2')$

والشروط الحدية الصفرية: $v\,(0,t)=0\quad ,\quad v\,(\pi,t)=0\quad\cdots\cdots\cdots(3')$

وحل هذه المسألة الحدية الجديدة يعطى بالدستور التالي:

$$v\,(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n\,(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\cdots\cdots\cdots(4')$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\varphi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi\quad ,\quad D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\overline{\psi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

$$T_n\,(t)=\frac{\ell}{n\pi a}\int_0^{t}\overline{f_n}\,(\tau)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}a\,(t-\tau)\right)d\tau$$

$$\overline{f_n}\,(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{f}\,(\xi,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

بما أن $\overline{\varphi}(x)=0$ فإنَّ $\overline{\varphi}(\xi)=0$ وبالتالي فإنَّ $C_n=0$.

وكما أن:

$$D_n=\frac{2}{n\pi(1)}\int_0^{\pi}\sin(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\xi\right)d\xi=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(\xi)\sin(n\xi)d\xi=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi}{2}\ ;\ n=1\\ 0\ ;\ n\neq 1\end{cases}\Rightarrow$$

$$D_n=\begin{cases}1\ ;\ n=1\\ 0\ ;\ n\neq 1\end{cases}$$

وأيضاً:

$$\overline{f_n}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\xi\right)d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(\xi)\sin(n\xi)d\xi=$$

$$=\frac{2}{\pi}\begin{cases}\frac{\pi}{2}\ ;\ n=1\\ 0\ ;\ n\neq 1\end{cases}\Rightarrow\ \overline{f_n}(t)=\begin{cases}1\ ;\ n=1\\ 0\ ;\ n\neq 1\end{cases}$$

وبما أنَّ $f_n(t)=0$ من أجل $n\neq 1$ فإنَّ $T_n(t)=0$ من أجل $n\neq 1$ وبالتالي فإنَّ:

$$T_1(t)=\frac{\pi}{(1)\pi(1)}\int_0^t\sin\left[\frac{(1)\pi}{\pi}(1)(t-\tau)\right](1)d\tau=\int_0^t\sin(t-\tau)d\tau=\left[\cos(t-\tau)\right]_{\tau=0}^{\tau=t}=1-\cos t$$

وبالتالي نجد أنَّ:

$$T_n(t)=\begin{cases}1-\cos t\ \ ;\ n=1\\ 0\ \ ;\ n\neq 1\end{cases}$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في عبارة الحل للمسألة الجديدة $(4')$ نجد أنَّ:

$$v(x,t)=\sin t\sin x+(1-\cos t)\sin x\quad\Rightarrow$$
$$v(x,t)=(\sin t-\cos t+1)\sin x\quad\cdots\cdots\cdots(5')$$

بتعويض العلاقتين $(5')$ و (5) في العلاقة (4) نحصل على عبارة الحل العام للمسألة الحدية المعطاة:

$$\boxed{u(x,t)=1+xt+(\sin t-\cos t+1)\sin x}$$

❷❶ **(الدورة التكميلية للعام 2007 – 2008)** أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية:

$$u_{tt}=4u_{xx}-4\cos 2t\ \ ,\ 0<x<\pi\ ,\ t>0\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

مع الشروط الابتدائية: $u(x,0)=1\ ,\ u_t(x,0)=\sin x\ \ ,0\leq x\leq\pi\ \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية غير المتجانسة: $u(0,t)=\cos 2t\ \ ,\ u(\pi,t)=\cos 2t\ \ ,t\geq 0\ \cdots\cdots\cdots(3)$

الحـل: إن المسألة الحدية المعطاة هي مسألة حدية غير متجانسة بشروط حدية غير صفرية وفيها:

$$a=2\ ,\ \ell=\pi\ ,\ \ f(x,t)=-4\cos 2t$$
$$\varphi(x)=1\ ,\ \psi(x)=\sin x$$
$$\mu_1(t)=\cos 2t\ \ ,\ \mu_2(t)=\cos 2t$$

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=U(x,t)+v(x,t)\ \cdots\cdots\cdots(4)$$

علماً أنَّ:

$$U(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{\ell}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]=\cos 2t+\frac{x}{\pi}\left[\cos 2t-\cos 2t\right]=\cos 2t \Rightarrow$$

$$\boxed{U(x,t)=\cos 2t} \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

$$U_t(x,t)=-2\sin(2t) \;,\; U_{tt}(x,t)=-4\cos 2t \;,\; U_{xx}(x,t)=0$$

$$U(x,0)=1 \;,\; U_t(x,0)=0$$

أما $v(x,t)$ فهي حل للمسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=a^2v_{xx}+\bar{f}(x,t)$$

مع الشروط الابتدائية: $v(x,0)=\bar{\varphi}(x) \;,\; v_t(x,0)=\bar{\psi}(x)$

والشروط الحدية الصفرية: $v(0,t)=0 \quad , \quad v(\ell,t)=0$

علماً أنَّ:

$$\bar{f}(x,t)=f(x,t)-\left(U_{tt}-a^2U_{xx}\right)=$$

$$=-4\cos(2t)-\left[-4\cos(2t)-4(0)\right]=0$$

$$\bar{\varphi}(x)=\varphi(x)-U(x,0)=1-1=0$$

$$\bar{\psi}(x)=\psi(x)-U_t(x,0)=\sin x-0=\sin x$$

وبالتالي فإنَّ $v(x,t)$ هي حل للمسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=4v_{xx} \quad \cdots\cdots\cdots(1')$$

مع الشروط الابتدائية: $v(x,0)=0 \;,\; v_t(x,0)=\sin x \quad \cdots\cdots\cdots(2')$

والشروط الحدية الصفرية: $v(0,t)=0 \quad , \quad v(\pi,t)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(3')$

وحل هذه المسألة الحدية الجديدة يعطى بالدستور التالي:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \quad \cdots\cdots\cdots(4')$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\bar{\varphi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi \quad , \quad D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\bar{\psi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

بما أن $\bar{\varphi}(x)=0$ فإنَّ $\bar{\varphi}(\xi)=0$ وبالتالي فإنَّ $C_n=0$ ، وكما أن:

$$D_n=\frac{2}{n\pi(2)}\int_0^{\pi}\sin(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\xi\right)d\xi=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(\xi)\sin(n\xi)d\xi=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} \;;\; n=1\\ 0 \;;\; n\neq 1\end{cases} \Rightarrow$$

$$D_n=\begin{cases}\frac{1}{2} \;;\; n=1\\ 0 \;;\; n\neq 1\end{cases}$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في عبارة الحل للمسألة الجديدة $(4')$ نجد أنَّ:

$$v(x,t)=\frac{1}{2}\sin(2t)\sin x \quad \cdots\cdots\cdots(5')$$

بتعويض العلاقتين $(5')$ و (5) في العلاقة (4) نحصل على عبارة الحل العام للمسألة الحدية المعطاة:

$$\boxed{u(x,t)=\cos(2t)+\frac{1}{2}\sin(2t)\sin x}$$

❸❶(الفصل الثاني للعام 2009 – 2010) المسألة العامة الحدية الأولى لمعادلة الذبذبات الحرة للوتر:

(هاااام جداً) حوِّل المسألة العامة الحديِّة الأولى لمعادلة الذبذبات الحرة للوتر:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t) \quad ; \quad 0<x<\ell \;,\; t>0 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

مع الشروط الابتدائية: $u(x,0)=\varphi(x) \;,\; u_t(x,0)=\psi(x) \;;\; 0\le x\le \ell \quad \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية غير المتجانسة: $u(0,t)=\mu_1(t) \;,\; u_x(\ell,t)=\mu_2(t) \;;\; t\ge 0 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$

إلى مسألة حدية مع شروط حدية صفرية، ثم أكتب عبارة حل المسألة الناتجة عن هذا التحويل.

تطبيق: أوجد حل المسألة الحدية السابقة في حالة: $f(x,t)=\sin x$

$$a=1 \;,\; \ell=\frac{\pi}{2} \;,\; \varphi(x)=1+x \;,\; \psi(x)=x \;,\; \mu_1(t)=1 \;,\; \mu_2(t)=1+t$$

الحـل:

سوف نبحث عن حل من الشكل:

$$u(x,t)=U(x,t)+v(x,t) \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

علماً أن $v(x,t)$ دالة مجهولة جديدة وهي عبارة عن انحراف الدالة $u(x,t)$ عن دالة معلومة $U(x,t)$

نشتق الحل (4) مرتين بالنسبة لـ t ومرتين بالنسبة لـ x فنجد أنَّ:

$$u_t=U_t+v_t \;\Rightarrow\; u_{tt}=U_{tt}+v_{tt}$$
$$u_x=U_x+v_x \;\Rightarrow\; u_{xx}=U_{xx}+v_{xx}$$

وبالتعويض في (1) و (2) و (3) على الترتيب نجد:

$$U_{tt}+v_{tt}=a^2(U_{xx}+v_{xx})+f(x,t) \;\Rightarrow\; v_{tt}=a^2v_{xx}+\left[f(x,t)-\left(U_{tt}-a^2U_{xx}\right)\right] \Rightarrow$$
$$v_{tt}=a^2v_{xx}+\overline{f}(x,t) \quad \cdots\cdots\cdots(1')$$

وتصبح الشروط الابتدائية الجديدة بالشكل:

$$\varphi(x)=u(x,0)=U(x,0)+v(x,0) \;\Rightarrow\; v(x,0)=\varphi(x)-U(x,0)=\overline{\varphi}(x)$$
$$\psi(x)=u_t(x,0)=U_t(x,0)+v_t(x,0) \;\Rightarrow\; v_t(x,0)=\psi(x)-U_t(x,0)=\overline{\psi}(x)$$

وبالتالي فالشروط الابتدائية الجديدة هي:

$$v(x,0)=\overline{\varphi}(x)\ ,\ v_t(x,0)=\overline{\psi}(x)\ \cdots\cdots\cdots(2')$$

تحديد الشروط الحدية الجديدة:

$$\mu_1(t)=u(0,t)=U(0,t)+v(0,t)\quad\Rightarrow\ v(0,t)=\mu_1(t)-U(0,t)=\overline{\mu_1}(t)$$

$$\mu_2(t)=u_x(\ell,t)=U_x(\ell,t)+v_x(\ell,t)\quad\Rightarrow\ v_x(\ell,t)=\mu_2(t)-U_x(\ell,t)=\overline{\mu_2}(t)$$

نختار الدالة $U(x,t)$ بحيث تصبح الشروط الحدية الجديدة صفرية أي بحيث يتحقق:

$$\overline{\mu_1}(t)=0\ \ ,\ \ \overline{\mu_2}(t)=0$$

ولهذا يكون الاختيار هو:

$$U(x,t)=\mu_1(t)+x\,\mu_2(t)\ \cdots\cdots\cdots(5)$$

اذاً أصبحت المسألة الحدية الجديدة هي مسألة حدية غير متجانسة بشروط حدية صفرية ونكتبها على الشكل:

$$v_{tt}=a^2v_{xx}+\overline{f}(x,t)\ \cdots\cdots\cdots(1')$$

مع الشروط الابتدائية: $v(x,0)=\overline{\varphi}(x)\ ,\ v_t(x,0)=\overline{\psi}(x)\ \cdots\cdots\cdots(2')$

والشروط الحدية الصفرية: $v(0,t)=0\quad,\quad v_x(\ell,t)=0\ \cdots\cdots\cdots(3')$

وحل هذه المسألة الحدية الجديدة يعطى بالدستور التالي:

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}x\right)+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}x\right)\cdots\cdots\cdots(4')$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\varphi}(\xi)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\xi\right)d\xi\quad,\quad D_n=\frac{4}{(2n+1)\pi a}\int_0^{\ell}\overline{\psi}(\xi)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\xi\right)d\xi$$

$$T_n(t)=\frac{2\ell}{(2n+1)\pi a}\int_0^{t}\overline{f_n}(\tau)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}a(t-\tau)\right)d\tau$$

$$\overline{f_n}(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{f}(\xi,t)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\xi\right)d\xi$$

بتعويض العلاقتين $(4')$ و (5) في العلاقة (4) نحصل على عبارة الحل العام للمسألة الحدية المعطاة.

حل التطبيق: إن المسألة الحدية المعطاة هي:

$$u_{tt}=u_{xx}+\sin x \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

مع الشروط الابتدائية: $u(x,0)=1+x \quad , \quad u_t(x,0)=x \quad \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية غير المتجانسة: $u(0,t)=1 \ , \ u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right)=1+t \quad \cdots\cdots\cdots(3)$

الحـل: إن المسألة الحدية المعطاة هي مسألة حدية غير متجانسة بشروط حدية غير صفرية وفيها:

$$a=1 \ , \ \ell=\frac{\pi}{2} \ , \quad f(x,t)=\sin x \ , \ \varphi(x)=1+x \ , \ \psi(x)=x \ , \ \mu_1(t)=1, \ \mu_2(t)=1+t$$

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=U(x,t)+v(x,t) \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

علماً أنَّ:

$$U(x,t)=\mu_1(t)+x\,\mu_2(t)=1+x(1+t) \Rightarrow \boxed{U(x,t)=1+x(1+t)} \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

$$U_t(x,t)=x \quad , \ U_{tt}(x,t)=0 \ , \ U_{xx}(x,t)=0$$

$$U(x,0)=1+x \quad , \ U_t(x,0)=x$$

أما $v(x,t)$ فهي حل للمسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=a^2v_{xx}+\bar{f}(x,t)$$

مع الشروط الابتدائية: $v(x,0)=\bar{\varphi}(x) \ , \ v_t(x,0)=\bar{\psi}(x)$

والشروط الحدية الصفرية: $v(0,t)=0 \quad , \quad v_x(\ell,t)=0$

علماً أنَّ:

$$\bar{f}(x,t)=f(x,t)-\left(U_{tt}-a^2U_{xx}\right)=\sin x-\left[0-1(0)\right]=\sin x$$

$$\bar{\varphi}(x)=\varphi(x)-U(x,0)=1+x-(1+x)=0$$

$$\bar{\psi}(x)=\psi(x)-U_t(x,0)=x-x=0$$

وبالتالي فإنَّ $v(x,t)$ هي حل للمسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=v_{xx}+\sin x \ ; \ 0\le x\le\frac{\pi}{2}, t\ge 0 \ \cdots\cdots\cdots(1')$$

مع الشروط الابتدائية: $v(x,0)=0 \ , \ v_t(x,0)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(2')$

والشروط الحدية الصفرية: $v(0,t)=0 \quad , \quad v_x\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(3')$

وحل هذه المسألة الحدية الجديدة يعطى بالدستور التالي:

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}x\right)+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}x\right)\cdots\cdots\cdots(4')$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\varphi}(\xi)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\xi\right)d\xi \quad , \quad D_n=\frac{4}{(2n+1)\pi a}\int_0^{\ell}\overline{\psi}(\xi)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\xi\right)d\xi$$

$$T_n(t)=\frac{2\ell}{(2n+1)\pi a}\int_0^{t}\overline{f_n}(\tau)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}a(t-\tau)\right)d\tau$$

$$\overline{f_n}(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{f}(\xi,t)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\xi\right)d\xi$$

بما أن $\overline{\varphi}(x)=0$ فإنَّ $\overline{\varphi}(\xi)=0$ وبالتالي فإنَّ $C_n=0$، وبما أن $\overline{\psi}(x)=0$ فإنَّ $\overline{\psi}(\xi)=0$ وبالتالي فإنَّ $D_n=0$.

وكما أن:

$$\overline{f_n}(t)=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\xi\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\frac{\pi}{2}}\xi\right)d\xi=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\xi\sin\left((2n+1)\xi\right)d\xi=\frac{4}{\pi}\begin{cases}\frac{\pi}{4}\ ;\ n=0\\ 0\ ;\ n\neq 0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\overline{f_n}(t)=\begin{cases}1\ ;\ n=0\\ 0\ ;\ n\neq 0\end{cases}$$

وبما أنَّ $f_n(t)=0$ من أجل $n\neq 0$ فإنَّ $T_n(t)=0$ من أجل $n\neq 0$ وبالتالي فإنَّ:

$$T_0(t)=\frac{2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{(2(0)+1)\pi(1)}\int_0^{t}f_0(\tau)\sin\left(\frac{(2(0)+1)\pi}{2\frac{\pi}{2}}(1)(t-\tau)\right)d\tau=$$
$$=\int_0^{t}(1)\sin(t-\tau)\,d\tau=\int_0^{t}\sin(t-\tau)\,d\tau=\left[\cos(t-\tau)\right]_{\tau=0}^{\tau=t}=1-\cos t$$

وبالتالي نجد أنَّ:

$$T_n(t)=\begin{cases}1-\cos t\ ;\ n=0\\ 0\quad ;\ n\neq 0\end{cases}$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في عبارة الحل للمسألة الجديدة $(4')$ نجد أنَّ:

$$v(x,t)=(1-\cos t)\sin x \quad \cdots\cdots\cdots(5')$$

بتعويض العلاقتين $(5')$ و (5) في العلاقة (4) نحصل على عبارة الحل العام للمسألة الحدية المعطاة:

$$\boxed{u(x,t)=1+x(1+t)+(1-\cos t)\sin x}$$

❹❶(الفصل الأول للعام 2006 – 2007) أوجد حل المعادلة:

$$u_{tt}=4u_{xx}+4xt\ ,\ (0<x<1\ ,\ t>0)\quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية: $u(x,0)=x\ ,\ u_t(x,0)=x-1 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية: $u(0,t)=t+1\ ,\ u(1,t)=1 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$

الحــل:

إن المسألة الحدية المعطاة هي مسألة غير متجانسة بشروط حدية غير صفرية وفيها:

$$a=2\ ,\ \ell=1\ ,\ f(x,t)=4xt\ ,\ \varphi(x)=x\ ,\ \psi(x)=x-1\ ,\ \mu_1(t)=t+1\ ,\ \mu_2(t)=1$$

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=U(x,t)+v(x,t)$$

حيث أنَّ:

$$U(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{\ell}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]=t+1+\frac{x}{1}\left[1-(t+1)\right]=1+t-xt \Rightarrow$$

$$\boxed{U(x,t)=1+t-xt} \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

$$U_t(x,t)=1-x\ ,\ U_{tt}(x,t)=0\ ,\ U_{xx}(x,t)=0\ ,\ U(x,0)=1\ ,\ U_t(x,0)=1-x$$

أما $v(x,t)$ فهي حل للمسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=a^2v_{xx}+\bar{f}(x,t)$$

مع الشروط الابتدائية: $v(x,0)=\bar{\varphi}(x)\ ,\ v_t(x,0)=\bar{\psi}(x)$

والشروط الحدية الصفرية: $v(0,t)=0 \quad ,\quad v(\ell,t)=0$

علماً أنَّ:

$$\bar{f}(x,t)=f(x,t)-\left(U_{tt}-a^2U_{xx}\right)=4xt-\left[0-4(0)\right]=4xt$$

$$\bar{\varphi}(x)=\varphi(x)-U(x,0)=x-1$$

$$\bar{\psi}(x)=\psi(x)-U_t(x,0)=(x-1)-(1-x)=2(x-1)$$

وبالتالي فإنَّ $v\left(x,t\right)$ هي حل للمسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=4v_{xx}+4xt \quad \cdots\cdots\cdots(1')$$

مع الشروط الابتدائية: $v\left(x,0\right)=x-1\ ,\ v_t\left(x,0\right)=2(x-1) \quad \cdots\cdots\cdots(2')$

والشروط الحدية الصفرية: $v\left(0,t\right)=0 \quad , \quad v\left(1,t\right)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(3')$

وحل هذه المسألة الحدية الجديدة يعطى بالدستور التالي:

$$v\left(x,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n\left(t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\cdots\cdots\cdots(4')$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\bar{\varphi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi \quad , \quad D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\bar{\psi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

$$T_n\left(t\right)=\frac{\ell}{n\pi a}\int_0^{t}f_n\left(\tau\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}a\left(t-\tau\right)\right)d\tau$$

$$f_n\left(t\right)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\bar{f}\left(\xi,t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

إنَّ:

$$C_n=\frac{2}{1}\int_0^{1}(\xi-1)\sin\left(\frac{n\pi}{1}\xi\right)d\xi=2\int_0^{1}(\xi-1)\sin\left(n\pi\xi\right)d\xi=$$

ولنوجد هذا التكامل بالتجزئة:

$$u=\xi-1 \Rightarrow du=d\xi$$

$$dv=\sin\left(n\pi\xi\right)d\xi \Rightarrow v=-\frac{1}{n\pi}\cos\left(n\pi\xi\right)$$

وبالتالي فإنَّ:

$$C_n=2\int_0^{1}(\xi-1)\sin\left(n\pi\xi\right)d\xi=2\left[-\frac{(\xi-1)}{n\pi}\cos\left(n\pi\xi\right)\right]_{\xi=0}^{\xi=1}+\frac{2}{n\pi}\underbrace{\int_0^{1}\cos\left(n\pi\xi\right)d\xi}_{=0}=$$

$$=0-\frac{2}{n\pi}+0=-\frac{2}{n\pi} \Rightarrow \boxed{C_n=-\frac{2}{n\pi}}$$

وأيضاً:

$$D_n=\frac{2}{n\pi(2)}\int_0^{1}2(\xi-1)\sin\left(\frac{n\pi}{1}\xi\right)d\xi=\frac{2}{n\pi}\int_0^{1}(\xi-1)\sin\left(n\pi\xi\right)d\xi=\frac{2}{n\pi}\left[\frac{-1}{n\pi}\right]$$

$$\Rightarrow D_n=-\frac{2}{n^2\pi^2}$$

وكما أنَّ:

$$f_n(t)=\frac{2}{1}\int_0^1 4\xi t\ \sin\left(\frac{n\pi}{1}\xi\right)d\xi=8t\int_0^{\pi}\xi\sin(n\pi\xi)d\xi=8t\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\right]$$

$$T_n(t)=\frac{1}{n\pi(2)}\int_0^t \sin\left[\frac{n\pi}{1}(2)(t-\tau)\right]\left(8\tau\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\right]\right)d\tau=$$

$$=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\int_0^t \tau\sin\left[2n\pi(t-\tau)\right]d\tau=$$

$$=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\left[\frac{1}{2n\pi}\tau\cos\left[2n\pi(t-\tau)\right]\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}-\frac{1}{2n\pi}\int_0^t\cos\left[2n\pi(t-\tau)\right]d\tau\right]$$

$$=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\left[\frac{t}{2n\pi}+\frac{1}{4n^2\pi^2}\sin\left[2n\pi(t-\tau)\right]\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}\right]$$

$$=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\left[\frac{t}{2n\pi}-\frac{1}{4n^2\pi^2}\sin(2n\pi t)\right]=\frac{(-1)^{n+1}}{n^4\pi^4}\left[2n\pi t-\sin(2n\pi t)\right]$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في عبارة الحل للمسألة الجديدة $(4')$ نجد أنَّ:

$$v(x,t)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n\pi}\cos(2n\pi t)+\frac{2}{n^2\pi^2}\sin(2n\pi t)\right]\sin(n\pi x)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4\pi^4}\left[2n\pi t-\sin(2n\pi t)\right]\sin(n\pi x)\cdots\cdots\cdots(5')$$

بتعويض العلاقتين $(5')$ و (5) في العلاقة (4) نحصل على عبارة الحل العام للمسألة الحدية المعطاة:

$$u(x,t)=1+t-x\,t-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n\pi}\cos(2n\pi t)+\frac{2}{n^2\pi^2}\sin(2n\pi t)\right]\sin(n\pi x)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4\pi^4}\left[2n\pi t-\sin(2n\pi t)\right]\sin(n\pi x)$$

❺❶ المسائل الحدية ذات عدم التجانسات المستقرة زمنياً:

أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f_0(x)\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية: $u(x,0)=\varphi(x)\ ,\ u_t(x,0)=\psi(x)\quad\cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية: $u(0,t)=u_1\quad,\quad u(\ell,t)=u_2\quad\cdots\cdots\cdots(3)$ علماً أن u_2,u_1 ثابتان.

الحـل:

نبحث عن حل لهذه المسألة على صورة مجموع:

$$u(x,t)=U(x)+v(x,t) \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

علماً أن الدالة $U(x)$ هي حل المعادلة:

$$a^2U''+f_0(x)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

بالشروط التالية: $U(0)=u_1 \ , \ U(\ell)=u_2 \quad \cdots\cdots\cdots(**)$

أما $v(x,t)$ فهي حل المسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=a^2v_{xx} \quad \cdots\cdots\cdots(1')$$

بالشروط الابتدائية: $v(x,0)=\bar{\varphi}(x) \ , \ v_t(x,0)=\bar{\psi}(x) \quad \cdots\cdots\cdots(2')$

والشروط الحدية الصفرية: $v(0,t)=0 \ , \ v(\ell,t)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(3')$

علماً أنَّ: $\bar{\varphi}(x)=\varphi(x)-U(x) \ , \ \bar{\psi}(x)=\psi(x)$.

إن المسألة الحدية الجديدة هي مسألة متجانسة بشروط حدية صفرية وقد سبق لنا دراستها.

❼❶ **(الفصل الثاني للعام 2006 – 2007)**: أوجد حل المعادلة:

$$u_{tt}=u_{xx}-\sin 2x \ , \ 0<x<\frac{\pi}{2} \ , \ t>0 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية: $u(x,0)=2x \ , \ u_t(x,0)=0 \ ; \ 0\le x\le\frac{\pi}{2} \quad \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية غير المتجانسة: $u(0,t)=0 \ , \ u\left(\frac{\pi}{2},t\right)=\pi \ , \ t\ge 0 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$

الحـل:

إن المسألة المعطاة هي المسألة الحدية ذات عدم التجانسات المستقرة زمنياً وفيها:

$$a=1 \ , \ \ell=\frac{\pi}{2} \ , \ f_0(x)=-\sin 2x \ , \ \varphi(x)=2x \ , \ \psi(x)=0 \ , \ u_1=0 \ , \ u_2=\pi$$

وحلها يعطى بالشكل: $u(x,t)=U(x)+v(x,t) \quad \cdots\cdots\cdots(4)$

حيث أن الدالة $U(x)$ هي حل المعادلة:

$$U''-\sin(2x)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

بالشروط التالية: $U(0)=0 \ , \ U\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi \quad \cdots\cdots\cdots(**)$

من $(*)$ لدينا:

$$U''-\sin(2x)=0 \Rightarrow U''=\sin(2x) \Rightarrow U'=-\frac{1}{2}\cos(2x)+c_1 \Rightarrow$$

$$U(x)=-\frac{1}{4}\sin(2x)+c_1x+c_2$$

وبالاستفادة من $(**)$ نجد أنَّ:

$$0=U(0)=-\frac{1}{4}\sin(0)+c_1(0)+c_2 \Rightarrow \boxed{c_2=0} \Rightarrow U(x)=-\frac{1}{4}\sin(2x)+c_1x \Rightarrow$$

$$\pi=U\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{4}\sin(\pi)+c_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{c_1=2}$$

ومنه نجد أنَّ:

$$\boxed{U(x)=2x-\frac{1}{4}\sin(2x)} \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

أما الدالة $v(x,t)$ فهي حل المسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=v_{xx} \quad \cdots\cdots\cdots(1')$$

بالشروط الابتدائية:

$$\left.\begin{aligned} v(x,0)&=\overline{\varphi}(x)=\varphi(x)-U(x)=2x-\left(2x-\frac{1}{4}\sin(2x)\right)=\frac{1}{4}\sin(2x) \\ v_t(x,0)&=\overline{\psi}(x)=\psi(x)=0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(2')$$

وبالشروط الحدية الصفرية: $(3')\cdots\cdots\cdots \quad v(0,t)=0 \;,\; v\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0$

وحل المسألة الجديدة يعطى بالدستور التالي:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \quad \cdots\cdots\cdots(6)$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\varphi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi \quad , \quad D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\overline{\psi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

وبما أنَّ $\overline{\psi}(x)=0$ فإنَّ $\overline{\psi}(\xi)=0$ وبالتالي فإنَّ $D_n=0$، وكما أنَّ:

$$C_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin(2\xi)\sin(2n\xi)d\xi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2\xi)\sin(2n\xi)d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\begin{cases}\frac{\pi}{4} \;;\; n=1 \\ 0 \;;\; n\neq 1\end{cases} \Rightarrow C_n=\begin{cases}\frac{1}{4} \;;\; n=1 \\ 0 \;;\; n\neq 1\end{cases}$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في عبارة الحل (6) نجد أنَّ:

$$v(x,t)=\frac{1}{4}\cos(2t)\sin(2x)\quad \cdots\cdots\cdots(7)$$

وبالاستفادة من العلاقتين (5) و (7) والتعويض في عبارة الحل العام للمسألة المعطاة نجد:

$$u(x,t)=2x-\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{4}\cos(2t)\sin(2x)\ \Rightarrow\ \boxed{u(x,t)=2x+\frac{1}{4}\left[\cos(2t)-1\right]\sin(2x)}$$

❽❶ **(الفصل الأول للعام 2007 – 2008):** أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+A\quad ,(0<x<\ell\ ,\ t>0)\cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية: $u(x,0)=\varphi(x)\ ,\ u_t(x,0)=\psi(x)\ ,(0\le x\le\ell)\ \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية: $u(0,t)=u_1\ ,\ u(\ell,t)=u_2\quad \cdots\cdots\cdots(3)$

علماً أنَّ u_2,u_1 ثابتان، A مقدار ثابت و $\psi(x),\varphi(x)$ دالتان معلومتان مستمرتان وقابلتان للاشتقاق.

تطبيق: أوجد حل المسألة الحدية السابقة في حالة:

$$A=8\ ,\ a=2\ ,\ \ell=\pi\ ,\ u_1=1\ ,\ u_2=2\ ,\ \varphi(x)=1+\pi x-x^2\ ,\ \psi(x)=0$$

الحـل:

نبحث عن حل لهذه المسألة على صورة مجموع:

$$u(x,t)=U(x)+v(x,t)\quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

علماً أن الدالة $U(x)$ هي حل المعادلة:

$$a^2U''+A=0\quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

بالشروط التالية: $U(0)=u_1\ ,\ U(\ell)=u_2\quad \cdots\cdots\cdots(**)$

وبمكاملة المعادلة $(*)$ مرتين بالنسبة لـ x نجد أنَّ:

$$a^2U''+A=0\ \Rightarrow\ U''=-\frac{A}{a^2}\ \Rightarrow U'=-\frac{A}{a^2}x+c_1\Rightarrow U(x)=-\frac{A}{2a^2}x^2+c_1x+c_2$$

علماً أن c_2,c_1 ثوابت تكامل وتحسب من الشروط $(**)$ كما يلي:

$$u_1=U(0)=-\frac{A}{2a^2}(0)^2+c_1(0)+c_2\ \Rightarrow \boxed{c_2=u_1}$$

ومنه فإنَّ: $U(x)=-\frac{A}{2a^2}x^2+c_1x+u_1$

وبالتالي فإنَّ:

$$u_2=U(\ell)=-\frac{A}{2a^2}(\ell)^2+c_1\ell+u_1 \Rightarrow c_1\ell=(u_2-u_1)+\frac{A}{2a^2}\ell^2 \Rightarrow \boxed{c_1=\frac{1}{\ell}(u_2-u_1)+\frac{A}{2a^2}\ell}$$

وبتعويض قيم c_2, c_1 في عبارة $U(x)$ نجد أنَّ:

$$U(x)=-\frac{A}{2a^2}x^2+\left[\frac{1}{\ell}(u_2-u_1)+\frac{A}{2a^2}\ell\right]x+u_1 \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

أما $v(x,t)$ فهي حل المسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=a^2v_{xx}$$

بالشروط الابتدائية: $v(x,0)=\overline{\varphi}(x)\ ,\ v_t(x,0)=\overline{\psi}(x)$

والشروط الحدية الصفرية: $v(0,t)=0\ ,\ v(\ell,t)=0$

علماً أنَّ: $\overline{\varphi}(x)=\varphi(x)-U(x)\ ,\ \overline{\psi}(x)=\psi(x)$.

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \quad \cdots\cdots\cdots(6)$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\varphi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi \quad , \quad D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\overline{\psi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

حل التطبيق: بالاستفادة من السؤال النظري وتعويض:

$$A=8\ ,\ a=2\ ,\ \ell=\pi\ ,\ u_1=1\ ,\ u_2=2\ ,\ \varphi(x)=1+\pi x-x^2\ ,\ \psi(x)=0$$

بالتعويض في العلاقة (5) نجد أن:

$$U(x)=-\frac{8}{2(2)^2}x^2+\left[\frac{1}{\pi}(2-1)+\frac{8}{2(2)^2}\pi\right]x+1=-x^2+\left[\pi+\frac{1}{\pi}\right]x+1$$

$$U(x)=-x^2+\left[\pi+\frac{1}{\pi}\right]x+1 \quad \cdots\cdots\cdots(5')$$

وكما أنَّ:

$$\overline{\varphi}(x)=\varphi(x)-U(x)=1+\pi x-x^2-\left[-x^2+\left[\pi+\frac{1}{\pi}\right]x+1\right]=-\frac{1}{\pi}x$$

$$\overline{\psi}(x)=\psi(x)=0$$

وبالتالي فإن $v(x,t)$ هي حل المسألة الحدية:

$$v_{tt}=4v_{xx}\quad \cdots\cdots\cdots(1')$$

بالشروط الابتدائية: $v(x,0)=-\dfrac{1}{\pi}x\quad ,v_t(x,0)=0\quad \cdots\cdots\cdots(2')$

والشروط الحدية الصفرية: $v(0,t)=0\ ,\ v(\pi,t)=0\quad \cdots\cdots\cdots(3')$

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\quad \cdots\cdots\cdots(6)$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\varphi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi\quad ,\quad D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\overline{\psi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

وبما أنَّ $\overline{\psi}(x)=0$ فإنَّ $\overline{\psi}(\xi)=0$ وبالتالي فإن $D_n=0$.

وكما أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[-\frac{1}{\pi}\xi\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\xi\right)d\xi=-\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}\xi\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\xi\right)d\xi=-\frac{2}{\pi^2}\left[\frac{(-1)^{n+1}\pi^2}{n\pi}\right]=\frac{2(-1)^n}{n\pi}$$

وبالتعويض في العلاقة (6) نجد أنَّ:

$$v(x,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos(2nt)\sin(nx)\quad \cdots\cdots\cdots(7)$$

وبتعويض العلاقتين $(5')$, (7) في عبارة الحل (4) نجد أن الحل العام للمسألة المعطاة هو:

$$u(x,t)=-x^2+\left[\pi+\frac{1}{\pi}\right]x+1+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos(2nt)\sin(nx)$$

❶❾(الفصل الأول للعام 2005 – 2006): أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية:

$$u_{tt}=u_{xx}+2\quad ,(0<x<1\ ,\ t>0)\cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية: $u(x,0)=0\ ,\ u_t(x,0)=0\quad ,(0\le x\le 1)\quad \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية: $u(0,t)=0\ ,\ u(1,t)=0\quad \cdots\cdots\cdots(3)$

الحـل:

يمكن أن تحل هذه المسألة الحدية بطريقتين:

الأولى: اعتبارها مسألة حدية غير متجانسة بشروط حدية صفرية.

الثانية: اعتبارها مسألة حدية مستقرة زمنياً.

سنختار الطريقة الثانية: إن المسألة الحدية المعطاة هي مسألة عدم التجانسات المستقرة زمنياً وفيها :

$$A=2\ ,\ a=1\ ,\ \ell=1\ ,\ u_1=0\ ,\ u_2=0\ ,\ \varphi(x)=0\ ,\ \psi(x)=0$$

وحلها يعطى بالشكل:

$$u(x,t)=U(x)+v(x,t)\ \cdots\cdots\cdots(4)$$

علماً أن $U(x)$ هي حل المعادلة:

$$U''+2=0\quad\cdots\cdots\cdots(*)$$

بالشروط التالية:

$$U(0)=0\ ,\ U(1)=0\ \cdots\cdots\cdots(**)$$

وبمكاملة المعادلة $(*)$ مرتين بالنسبة لـ x نجد أنَّ:

$$U''+2=0\ \Rightarrow U''=-2\ \Rightarrow U'=-2x+c_1\ \Rightarrow U(x)=-x^2+c_1x+c_2$$

علماً أن c_2,c_1 ثوابت تكامل وتحسب من الشروط $(**)$ كما يلي:

$$0=U(0)=-(0)^2+c_1(0)+c_2\Rightarrow \boxed{c_2=0}$$

ومنه فإنَّ:

$$U(x)=-x^2+c_1x$$

وبالتالي فإنَّ:

$$0=U(1)=-(1)^2+c_1(1)\Rightarrow \boxed{c_1=1}$$

وبتعويض قيم c_2,c_1 في عبارة $U(x)$ نجد أنَّ:

$$U(x)=x-x^2\cdots\cdots\cdots(5)$$

أما $v(x,t)$ فهي حل المسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=a^2v_{xx}\quad\cdots\cdots\cdots(1')$$

بالشروط الابتدائية:

$$v(x,0)=\bar{\varphi}(x)\ ,\ v_t(x,0)=\bar{\psi}(x)\quad\cdots\cdots\cdots(2')$$

والشروط الحدية الصفرية:

$$v(0,t)=0\ ,\ v(\ell,t)=0\quad\cdots\cdots\cdots(3')$$

علماً أنَّ: $\bar{\varphi}(x)=\varphi(x)-U(x)\ ,\ \bar{\psi}(x)=\psi(x)$.

ومنه فإن:

$$\bar{\varphi}(x)=\varphi(x)-U(x)=0-\left(x-x^2\right)=x^2-x\quad ,\ \bar{\psi}(x)=\psi(x)=0$$

أي أنَّ $v(x,t)$ هي حل المسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=v_{xx}\quad\cdots\cdots\cdots(1')$$

بالشروط الابتدائية:

$$v(x,0)=x^2-x\quad ,\ v_t(x,0)=0\quad\cdots\cdots\cdots(2')$$

والشروط الحدية الصفرية:

$$v(0,t)=0\ ,\ v(1,t)=0\quad\cdots\cdots\cdots(3')$$

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\quad\cdots\cdots\cdots(6)$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\bar{\varphi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi\quad,\quad D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\bar{\psi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

وبما أنَّ $\bar{\psi}(x)=0$ فإنَّ $\bar{\psi}(\xi)=0$ وبالتالي فإنَّ $D_n=0$.

وكما أن:

$$C_n=\frac{2}{1}\int_0^1\left[\xi^2-\xi\right]\sin\left(\frac{n\pi}{1}\xi\right)d\xi=2\int_0^1\left(\xi^2-\xi\right)\sin(n\pi\xi)d\xi$$

ولنحسب التكامل الأخير بالتجزئة:

$$u=\xi^2-\xi\quad\Rightarrow du=(2\xi-1)d\xi$$

$$dv=\sin(n\pi\xi)d\xi\quad\Rightarrow v=-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi\xi)$$

ومنه فإنَّ:

$$\int_0^1\left(\xi^2-\xi\right)\sin(n\pi\xi)d\xi=-\frac{1}{n\pi}\left(\xi^2-\xi\right)\cos(n\pi\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=1}+\frac{1}{n\pi}\int_0^1(2\xi-1)\cos(n\pi\xi)d\xi$$

$$=0+\frac{1}{n\pi}\int_0^1(2\xi-1)\cos(n\pi\xi)d\xi$$

ننجز التكامل الأخير بالتجزئة أيضاً:

$$u=(2\xi-1)\Rightarrow du=2d\xi$$

$$dv=\cos(n\pi\xi)d\xi\Rightarrow v=\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi\xi)$$

ومنه فإنَّ:

$$\int_0^1(2\xi-1)\cos(n\pi\xi)d\xi=\frac{1}{n\pi}(2\xi-1)\sin(n\pi\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=1}-\frac{2}{n\pi}\int_0^1\sin(n\pi\xi)d\xi=$$

$$=0+\frac{2}{(n\pi)^2}\left[\cos(n\pi\xi)\right]_{\xi=0}^{\xi=1}=\frac{2}{(n\pi)^2}\left[(-1)^n-1\right]\Rightarrow$$

$$\int_0^1\left(\xi^2-\xi\right)\sin(n\pi\xi)d\xi=\frac{1}{n\pi}\int_0^1(2\xi-1)\cos(n\pi\xi)d\xi=\frac{2}{(n\pi)^3}\left[(-1)^n-1\right]$$

$$C_n=2\int_0^1\left(\xi^2-\xi\right)\sin(n\pi\xi)d\xi=\frac{4}{(n\pi)^3}\left[(-1)^n-1\right]$$

وبالتالي فإنَّ:

$$v(x,t)=\frac{4}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[(-1)^n-1\right]}{n^3}\cos(n\pi t)\sin(n\pi x)\quad\cdots\cdots\cdots(7)$$

وبالاستفادة العلاقتين $(5),(7)$ والتعويض في عبارة الحل العام (4) نجد أن الحل المطلوب هو:

$$\boxed{u(x,t)=x-x^2+\frac{4}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[(-1)^n-1\right]}{n^3}\cos(n\pi t)\sin(n\pi x)}$$

تمرينات غير محلولة

❶**(الفصل الثاني للعام 2013 – 2014)** أوجد حل المعادلة:

$$u_{tt}=4u_{xx}+t\sin(2x)-16\sin(4t),\ (0<x<\pi\ ,\ t>0)\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية: $u(x,0)=\sin(2x)\ ,\ u_t(x,0)=4\quad\cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية: $u(0,t)=\sin(4t)\ ,\ u(\pi,t)=\sin(4t)\quad\cdots\cdots\cdots(3)$

❷**(الفصل الأول للعام 2006 – 2007)** أوجد حل المعادلة:

$$u_{tt}=4u_{xx}+4xt\ ,(0<x<1\ ,\ t>0)\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية: $u(x,0)=x\ ,\ u_t(x,0)=-1\quad\cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية: $u(0,t)=t\ ,\ u(1,t)=1+t\quad\cdots\cdots\cdots(3)$

❸ **(الفصل الأول للعام 2014 – 2015)**: أوجد حل المعادلة:

$$u_{tt}=u_{xx}\ ,(0<x<1\ ,\ t>0)\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية: $u(x,0)=x+1\ ,\ u_t(x,0)=0\quad\cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية: $u(0,t)=t+1,\ u(1,t)=t^3+2\ ,t>0\quad\cdots\cdots\cdots(3)$

❹**(الفصل الثاني للعام 2004 – 2005)**: أوجد حل المعادلة:

$$u_{tt}=u_{xx}+\cos t\ ,\ (0<x<\pi\ ,\ t>0)\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية: $u(x,0)=0\ ,\ u_t(x,0)=\sin x\ ,\ 0\le x\le\pi\quad\cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية: $u(0,t)=1\ ,\ u(\pi,t)=1+\pi t\ ,\ t\ge 0\quad\cdots\cdots\cdots(3)$

✍ انتهى الفصل الثاني

❶**(الفصل الثاني للعام 2009 – 2010):** عين الحل المتصل والذي لا يساوي الصفر بالتطابق في المنطقة المغلقة $\{0\le x\le \ell \ ,\ 0<t\le T\}$ لمعادلة التوصيل الحراري المتجانسة:

$$u_t=a^2u_{xx}\quad ,\ 0<x<\ell\ ,\ 0<t\le T\quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشرط الابتدائي: $u(x,0)=\varphi(x)\ \ ,\ 0\le x\le \ell\ \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية المتجانسة: $u(0,t)=0\quad ,\ u(\ell,t)=0\quad ,\ 0\le t\le T\ \cdots\cdots\cdots(3)$

ثم استنتج دالة المصدر اللحظي.

تطبيق: أوجد حل المسألة من أجل $\ell=1\ ,\ a=1$ و:

$$\varphi(x)=\begin{cases}2x & ,\ \ 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\[2mm] 2(1-x) & ,\ \ \dfrac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$$

الحل: سوف نبحث عن حل لهذه المسألة على الشكل:

$$u(x,t)=X(x).T(t)\quad ;\ X(x).T(t)\neq 0\ \cdots\cdots\cdots(4)$$

نشتق العلاقة (4) مرة بالنسبة لـ t ومرتين بالنسبة لـ x فنجد أنَّ:

$$u_t=X(x)T'(t)$$
$$u_{xx}=X''(x)T(t)$$

وبالتعويض في (1) نجد أنَّ:

$$X(x)T'(t)=a^2X''(x)T(t)$$

بقسمة طرفي العلاقة الأخيرة على المقدار $a^2X(x)T(t)\neq 0$ نجد:

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

ومن هذا التناسب نحصل على المعادلتين:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0\ \cdots\cdots\cdots(5)$$
$$T'(t)+a^2\lambda T(t)=0\ \cdots\cdots\cdots(6)$$

من الشروط الحدية (3) نجد أنَّ:

$$\left.\begin{aligned}0=u(0,t)=X(0).T(t)\ &\Rightarrow X(0)=0\ ;\ T(t)\neq 0\\ 0=u(\ell,t)=X(\ell).T(t)\ &\Rightarrow X(\ell)=0\ ;\ T(t)\neq 0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(7)$$

ولنوجد حل المعادلة (5) غير صفري ويحقق الشروط (7)، وذلك من أجل $\lambda>0$ (لأنه في حالة $\lambda\le 0$ نحصل على

الحلول الصفرية):

وبالتالي فإن المعادلة المميزة للمعادلة (5) هي:

$$\rho^2+\lambda=0 \;\Rightarrow\; \rho^2=-\lambda \;\Rightarrow\; \rho^2=i^2\lambda \;\Rightarrow\; \rho=\mp i\sqrt{\lambda}$$

ومنه فإنَّ:

$$X(x)=c_1\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)+c_2\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

وبتطبيق الشروط (7) نجد أنَّ:

$$0=X(0)=c_1 \Rightarrow \boxed{c_1=0}$$

ومنه فإنَّ:

$$X(x)=c_2\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

وبتطبيق الشرط الثاني:

$$0=X(\ell)=c_2\sin\left(\sqrt{\lambda}\,\ell\right) \;\Rightarrow\; \sin\left(\sqrt{\lambda}\,\ell\right)=0 \;;\; c_2\neq 0$$

حيث أننا نبحث عن حل مغاير للحل الصفري، ومنه فإنَّ:

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}\,\ell\right)=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\,\ell=n\pi \Rightarrow \sqrt{\lambda}=\frac{n\pi}{\ell} \Rightarrow \lambda=\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2,\; n=1,2,3,\ldots$$

وباختيار $c_2=1$ نجد أنَّ حل المعادلة (5) والمحقق للشروط (7) هو:

$$X_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

وبتعويض $\lambda=\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$ في المعادلة (6) نحصل على المعادلة:

$$T'(t)+\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 T(t)=0$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى ، وهي ذات متحولات منفصلة ونحلها بالشكل:

$$T'(t)=-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 T(t) \;\Rightarrow\; \frac{d\,T(t)}{dt}=-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 T(t) \;\Rightarrow\; \frac{dT(t)}{T(t)}=-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 dt \;\Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{T(t)}{C}\right)=-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t \;\Rightarrow\; \frac{T(t)}{C}=e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t} \;\Rightarrow\; T(t)=C\,e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t} \;\Rightarrow$$

$$T_n(t)=C_n\,e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}$$

حيث أنَّ C_n ثوابت مجهولة يطلب تعيينها.

لدينا من العلاقة (4) أنَّ:

$$u(x,t)=X(x).T(t)$$

ومنه نجد الحلول الخاصة:

$$u_n(x,t)=X_n(x).T_n(t)=C_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

ومنه فإن الحل العام المطلوب هو مجموع الحلول الخاصة أي:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

وبتطبيق الشرط الابتدائي (2) على الحل العام نجد أنَّ:

$$\varphi(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\ \Rightarrow C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

وبتعويض قيمة C_n في عبارة الحل نجد أن الحل يكتب بالشكل:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi\, e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)=$$

$$=\int_0^{\ell}\left[\frac{2}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)\right]\varphi(\xi)d\xi=\int_0^{\ell}G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi$$

حيث تسمى الدالة $G(x,\xi,t)$ دالة المصدر اللحظي، وتساوي كما وجدنا:

$$G(x,\xi,t)=\frac{2}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)$$

حل التطبيق: إن المسألة المعطاة هي مسألة حدية متجانسة بشروط حدية صفرية وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

ومنه فإنَّ:

$$C_n=\frac{2}{1}\int_0^1\varphi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{1}\xi\right)d\xi=2\int_0^{\frac{1}{2}}\varphi(\xi)\sin(n\pi\xi)d\xi+2\int_{\frac{1}{2}}^1\varphi(\xi)\sin(n\pi\xi)d\xi=$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{2}}2\xi\sin(n\pi\xi)d\xi+2\int_{\frac{1}{2}}^1 2(1-\xi)\sin(n\pi\xi)d\xi=$$

$$=4\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\xi\sin(n\pi\xi)d\xi+\int_{\frac{1}{2}}^1(1-\xi)\sin(n\pi\xi)d\xi\right]\cdots\cdots\cdots(*)$$

لنوجد التكاملات بطريقة التجزئة:

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\xi\sin(n\pi\xi)d\xi=-\frac{1}{n\pi}\xi\cos(n\pi\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=\frac{1}{2}}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\cos(n\pi\xi)d\xi=$$

$$=-\frac{1}{2n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{(n\pi)^2}\sin(n\pi\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{(n\pi)^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1(1-\xi)\sin(n\pi\xi)d\xi=-\frac{1}{n\pi}(1-\xi)\cos(n\pi\xi)\Big|_{\xi=\frac{1}{2}}^{\xi=1}-\frac{1}{n\pi}\int_{\frac{1}{2}}^1\cos(n\pi\xi)d\xi=$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{(n\pi)^2}\sin(n\pi\xi)\Big|_{\xi=\frac{1}{2}}^{\xi=1}=\frac{1}{2n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{(n\pi)^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$C_n=4\left[-\frac{1}{2n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{(n\pi)^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{(n\pi)^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right]\Rightarrow$$

$$C_n=\frac{8}{(n\pi)^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

وبالتعويض في عبارة الحل نجد أنَّ:

$$\boxed{u(x,t)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)e^{-n^2\pi^2t}\sin(n\pi x)}$$

وبتبديل كل n بـ $2n+1$ في عبارة الحل نكون قدا استثنينا الأصفار من أجل القيم الزوجية لـ n:

$$u(x,t)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)e^{-(2n+1)^2\pi^2 t}\sin\left[(2n+1)\pi x\right]\Rightarrow$$

$$u(x,t)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}e^{-(2n+1)^2\pi^2 t}\sin\left[(2n+1)\pi x\right]$$

❸ المسألة الحدية المتجانسة بشروط حدية غير صفرية:

(الفصل الثاني للعام 2005 – 2006) أوجد حل معادلة التوصيل الحراري المتجانسة:

$$u_t=a^2u_{xx}\ ,\ 0<x<\ell\ ,\ 0<t<T\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشرط الابتدائي: $u(x,0)=\varphi(x)\ ,\ 0\le x\le\ell\ \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية غير المتجانسة: $u(0,t)=\mu_1(t)\ ,\ u(\ell,t)=\mu_2(t)\ ,\ 0\le t\le T\ \cdots\cdots\cdots(3)$

تطبيق: أوجد حل المسألة من أجل: $\mu_1(t)=t\ ,\ \mu_2(t)=0\ ,\ \varphi(x)=0\ ,\ a=1\ ,\ \ell=\pi$.

الحـــل: سوف نبحث عن الحل في الصورة التالية:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\ \cdots\cdots\cdots(4)$$

علماً أنَّ:

$$T_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}u(x,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx\ \cdots\cdots\cdots(5)$$

نكامل العلاقة (5) بالتجزئة مرتين متتاليتين:

$$u=u(x,t)\ \Rightarrow\ du=u_x(x,t)dx$$

$$dv=\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx\Rightarrow v=-\frac{\ell}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

ومنه :

$$T_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}u(x,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx=$$

$$=\frac{2}{\ell}\left[-\frac{\ell}{n\pi}u(x,t)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\Big|_{x=0}^{x=\ell}+\frac{\ell}{n\pi}\int_0^{\ell}u_x(x,t)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx\right]$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\left[u(\ell,t)\cos(n\pi)-u(0,t)(1)\right]+\frac{2}{n\pi}\int_0^{\ell}u_x(x,t)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[\mu_1(t)-(-1)^n\mu_2(t)\right]+\frac{2}{n\pi}\int_0^{\ell}u_x(x,t)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

ولننجز التكامل الموجود في العلاقة $(*)$ بالتجزئة:

$$u = u_x(x,t) \Rightarrow du = u_{xx}(x,t)dx$$
$$dv = \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx \Rightarrow v = \frac{\ell}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

ومنه:

$$\int_0^\ell u_x(x,t)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx = \frac{\ell}{n\pi}u_x(x,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\ell} - \frac{\ell}{n\pi}\int_0^\ell u_{xx}(x,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx$$
$$= \frac{\ell}{n\pi}\left[u_x(\ell,t)\sin(n\pi) - u_x(0,t)\sin(0)\right] - \frac{\ell}{n\pi}\int_0^\ell u_{xx}(x,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx$$
$$= -\frac{\ell}{n\pi}\int_0^\ell u_{xx}(x,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$T_n(t) = \frac{2}{n\pi}\left[\mu_1(t) - (-1)^n\mu_2(t)\right] - \frac{2\ell}{(n\pi)^2}\int_0^\ell u_{xx}(x,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx \quad \cdots\cdots\cdots(6)$$

ومن جهة أخرى نشتق العلاقة (5) بالنسبة لـ t فنجد أنَّ:

$$\frac{dT_n(t)}{dt} = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell u_t(x,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx \quad \cdots\cdots\cdots(7)$$

وبما أنه لدينا من المعادلة (1) أنَّ: $u_t(x,t) = a^2u_{xx}(x,t)$ فإنه بالتعويض في العلاقة (7) نجد أنَّها تصبح بالشكل:

$$\frac{dT_n(t)}{dt} = \frac{2a^2}{\ell}\int_0^\ell u_{xx}(x,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx \Rightarrow$$
$$\int_0^\ell u_{xx}(x,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx = \frac{\ell}{2a^2}\frac{dT_n(t)}{dt} \quad \cdots\cdots\cdots(8)$$

وبالاستفادة من (8) والتعويض في (6) نجد أنَّ:

$$T_n(t) = \frac{2}{n\pi}\left[\mu_1(t) - (-1)^n\mu_2(t)\right] - \frac{2\ell}{(n\pi)^2}\left[\frac{\ell}{2a^2}\frac{dT_n(t)}{dt}\right] \Rightarrow$$
$$T_n(t) = \frac{2}{n\pi}\left[\mu_1(t) - (-1)^n\mu_2(t)\right] - \left(\frac{\ell}{n\pi a}\right)^2\frac{dT_n(t)}{dt} \Rightarrow$$
$$\left(\frac{\ell}{n\pi a}\right)^2\frac{dT_n(t)}{dt} + T_n(t) = \frac{2}{n\pi}\left[\mu_1(t) - (-1)^n\mu_2(t)\right] \Rightarrow$$

$$\frac{dT_n(t)}{dt}+\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 T_n(t)=\frac{2}{n\pi}\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2\left[\mu_1(t)-(-1)^n\mu_2(t)\right] \Rightarrow$$

$$\frac{dT_n(t)}{dt}+\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 T_n(t)=\frac{2n\pi a^2}{\ell^2}\left[\mu_1(t)-(-1)^n\mu_2(t)\right] \quad \cdots\cdots\cdots(9)$$

إن المعادلة (9) هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى وغير متجانسة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu=e^{\int\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 dt}=e^{\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\frac{d}{dt}\left[T_n(t)e^{\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}\right]=\frac{2n\pi a^2}{\ell^2}e^{\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}\left[\mu_1(t)-(-1)^n\mu_2(t)\right]$$

وبالمكاملة نجد أنَّ:

$$T_n(t)e^{\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}=\frac{2n\pi a^2}{\ell^2}\int_0^t e^{\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 \tau}\left[\mu_1(\tau)-(-1)^n\mu_2(\tau)\right]d\tau+C_n \Rightarrow$$

$$T_n(t)=\frac{2n\pi a^2}{\ell^2}e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}\int_0^t e^{\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 \tau}\left[\mu_1(\tau)-(-1)^n\mu_2(\tau)\right]d\tau+C_n\, e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t} \quad \cdots\cdots\cdots(10)$$

من العلاقة الأخيرة نجد أنَّ:

$$T_n(0)=C_n \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

وبتطبيق الشرط الابتدائي (2) على عبارة الحل (4) نجد أنَّ:

$$\varphi(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \quad \cdots\cdots\cdots(11)$$

وبالاستفادة من العلاقة $(*)$ نجد أن العلاقة (11) تصبح بالشكل:

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

وبالتالي فإنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

وبالتالي أصبح حل المسألة الحدية المعطاة هو:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

حيث أنَّ:

$$T_n(t)=\frac{2n\pi a^2}{\ell^2}e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}\int_0^t e^{\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2\tau}\left[\mu_1(\tau)-(-1)^n\mu_2(\tau)\right]d\tau+C_n\ e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^\ell\varphi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

حل التطبيق: لدينا: $\mu_1(t)=t\ ,\ \mu_2(t)=0\ ,\ \varphi(x)=0\ ,\ a=1\ ,\ \ell=\pi$ ، وكون المسألة الحدية المعطاة متجانسة بشروط حدية غير صفرية فإنَّ حلها يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

حيث أنَّ:

$$T_n(t)=\frac{2n\pi a^2}{\ell^2}e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}\int_0^t e^{\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2\tau}\left[\mu_1(\tau)-(-1)^n\mu_2(\tau)\right]d\tau+C_n\ e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^\ell\varphi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

وبما أنَّ $\varphi(x)=0$ فإنَّ $\varphi(\xi)=0$ وبالتالي $C_n=0$.

ومنه فإنَّ:

$$T_n(t)=\frac{2n\pi(1)^2}{\pi^2}e^{-\left(\frac{n\pi(1)}{\pi}\right)^2 t}\int_0^t e^{\left(\frac{n\pi(1)}{\pi}\right)^2\tau}\left[\tau-(-1)^n(0)\right]d\tau+(0)e^{-\left(\frac{n\pi(1)}{\pi}\right)^2 t}$$

$$=\frac{2n}{\pi}e^{-n^2t}\int_0^t\tau e^{n^2\tau}d\tau=\frac{2n}{\pi}e^{-n^2t}\left[\frac{1}{n^2}\tau e^{n^2\tau}\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}-\frac{1}{n^2}\int_0^t e^{n^2\tau}d\tau\right]$$

$$=\frac{2n}{\pi}e^{-n^2t}\left[\frac{1}{n^2}te^{n^2t}-\frac{1}{n^4}e^{n^2\tau}\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}\right]=\frac{2n}{\pi}e^{-n^2t}\left[\frac{1}{n^2}te^{n^2t}-\frac{1}{n^4}\left[e^{n^2t}-1\right]\right]\Rightarrow$$

$$\boxed{T_n(t)=\frac{2}{\pi n^3}\left[n^2t-1+e^{-n^2t}\right]}$$

وبالتعويض في عبارة الحل العام نجد أنَّ الحل المطلوب:

$$\boxed{u(x,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left[n^2t-1+e^{-n^2t}\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)}$$

❹ المسألة الحدية غير المتجانسة بشروط حدية صفرية:

(الفصل الثاني للعام 2005 – 2006): أوجد حل معادلة التوصيل الحراري غير المتجانسة:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)\ , 0<x<\ell\ ,\ 0<t<T \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشرط الابتدائي:

$$u(x,0)=\varphi(x)\ ,\ 0\le x\le \ell \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

والشروط الحدية المتجانسة:

$$u(0,t)=0\quad ,\quad u(\ell,t)=0\quad ,0\le t\le T \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

الحــل:

سوف نبحث عن حل للمسألة المعطاة على صورة مجموع دالتين:

$$u(x,t)=w(x,t)+v(x,t) \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

علماً أن $w(x,t)$ هو حل المعادلة المتجانسة من (1) والمحققة للشروط (2) و (3) أي أنَّ :

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

حيث أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

أما الدالة $v(x,t)$ فهي حل خاص لغير المتجانسة، والمحقق للشرط الابتدائي الصفري:

$$v(x,0)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

وسوف نبحث عن هذه الدالة على شكل تحليل متسلسلة فورييه على الشكل:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

أي أن الدالة $v(x,t)$ تتعين إذا تعينت الدوال $u_n(t)$.

من أجل ذلك نمثل الدالة $f(x,t)$ وفق تحليل فورييه على الشكل:

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

علماً أنَّ:

$$f_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(\xi,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi \quad \cdots\cdots\cdots(6)$$

نشتق العلاقة (5) مرة بالنسبة لـ t ومرتين بالنسبة لـ x فنجد أنَّ:

$$v_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

$$v_x(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{\ell}u_n(t)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

$$v_{xx}(x,t)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2u_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في (1) نجد أنَّ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)=-a^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2u_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[u_n'(t)+\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2u_n(t)-f_n(t)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)=0$$

وبالمطابقة مع الطرف الثاني نجد أنَّ:

$$u_n'(t)+\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2u_n(t)-f_n(t)=0\ \Rightarrow\ u_n'(t)+\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2u_n(t)=f_n(t)\ \cdots\cdots\cdots(7)$$

وبالاستعانة بالشرط الابتدائي الصفري $(*)$ والحل (4) نجد أنَّ:

$$0=v(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(0)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\ \Rightarrow\ u_n(0)=0\ \cdots\cdots\cdots(8)$$

إن المعادلة (7) هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى وغير متجانسة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu=e^{\int\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2dt}=e^{\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2t}$$

بضرب طرفي المعادلة (7) بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2t}u_n(t)\right]=e^{\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2t}f_n(t)$$

وبالمكاملة نجد أنَّ:

$$e^{\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2t}u_n(t)=\int_0^te^{\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2\tau}f_n(\tau)d\tau+A\ \Rightarrow$$

$$u_n(t)=\int_0^te^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2(t-\tau)}f_n(\tau)d\tau+Ae^{\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2t}$$

وبتطبيق الشرط (8) على العلاقة الأخيرة لحساب قيمة الثابت نجد أنَّ:

$$0=u_n(0)=A\ \Rightarrow\boxed{A=0}$$

وبالتالي نجد أنَّ:

$$u_n(t)=\int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2(t-\tau)} f_n(\tau)d\tau$$

وبالتالي بتعيين الدالة $u_n(t)$ تكون الدالة $v(x,t)$ قد تعينت وأصبح حل المسألة المعطاة هو:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi \quad , \quad u_n(t)=\int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2(t-\tau)} f_n(\tau)d\tau$$

$$f_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(\xi,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

❺**(الفصل الثاني للعام 2012 – 2013)** حوِّل المسألة الحدية الآتية:

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t)\ ;\ 0<x<\ell\ ,t>0 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

مع الشرط الابتدائي: $u(x,0)=\varphi(x)\ ,\ 0\le x\le \ell \quad \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية الآتية: $u(0,t)=\mu_1(t)\ ,\ u(\ell,t)=\mu_2(t)\ \ ,\ t\ge 0 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$

إلى مسألة حدِّية مع شروط حدِّية صفريِّة ، ثم اكتب عبارة حل المسألة الناتجة عن هذا التحويل.

تطبيق: عين حل المسألة المطروحة في حالة:

$$\ell=\pi\ ,\ a=1,\ f(x,t)=1+\frac{2}{\pi}xt+t\sin x$$

$$\varphi(x)=1+\sin x$$

$$\mu_1(t)=t+1 \qquad , \qquad \mu_2(t)=t^2+t+1$$

الحــــل:

سوف نبحث عن حل للمسألة الحديِّة المعطاة من الشكل:

$$u(x,t)=U(x,t)+v(x,t)$$

نشتق هذه العلاقة مرة بالنسبة لـ t ، ومرتين بالنسبة لـ x ثم نبدل في المسألة الحدية المعطاة لنجد أن الدالة $v(x,t)$ ستعرف بأنها حل للمعادلة:

$$v_t=a^2v_{xx}+\overline{f}(x,t)$$

حيث أنَّ: $\overline{f}(x,t)=f(x,t)-\left[U_t-a^2U_{xx}\right]$

من الشروط المعطاة، وعبارة التحويل نحصل على الشرط الابتدائي الجديد التالي:

$$v(x,0)=\overline{\varphi}(x)$$

علماً أن:

$$\overline{\varphi}(x)=\varphi(x)-U(x,0)$$

وعلى الشروط الحدية التالية:

$$v(0,t)=\overline{\mu_1}(t) \quad , \quad v(\ell,t)=\overline{\mu_2}(t)$$

علماً أنَّ:

$$\overline{\mu_1}(t)=\mu_1(t)-U(0,t) \quad , \quad \overline{\mu_2}(t)=\mu_2(t)-U(\ell,t)$$

نختار الدالة المساعدة $U(x,t)$ بحيث يتحقق $\overline{\mu_1}(t)=0 \ , \ \overline{\mu_2}(t)=0$ ولهذا الغرض يكفي أن نضع :

$$U(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{\ell}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]$$

وبالتالي فإنَّ تعيين $u(x,t)$ التي تعطي حل المسألة الحدية العامة يؤول إلى تعيين الدالة $v(x,t)$ التي تعطي حل المسألة الحدية الجديدة بالشروط الحدية الصفرية.

ويعطى حل المسألة الحدية الجديدة بالدستور التالي:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

علماً أن:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\varphi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

$$v_n(t)=\int_0^{t}e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2(t-\tau)}\overline{f_n}(\tau)d\tau$$

$$\overline{f_n}(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{f}(\xi,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

حل التطبيق:

$$u_t=u_{xx}+1+\frac{2}{\pi}xt+t\sin x \quad ; \ 0<x<\ell\,,\, t>0 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

مع الشرط الابتدائي: $u(x,0)=1+\sin x \quad \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية الآتية: $u(0,t)=t+1 \quad , \ u(\pi,t)=t^2+t+1 \quad , \ t\geq 0 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$

الحــل:

إن المسألة الحدية المعطاة هي مسألة حدية غير متجانسة بشروط حدية غير صفرية وفيها :

$$\ell=\pi \;,\; a=1 \,,\; f(x,t)=1+\frac{2}{\pi}xt+t\sin x \quad,\quad \varphi(x)=1+\sin x$$

$$\mu_1(t)=t+1 \qquad,\qquad \mu_2(t)=t^2+t+1$$

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=U(x,t)+v(x,t) \;\cdots\cdots\cdots(4)$$

علماً أنَّ:

$$U(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{\ell}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]=(t+1)+\frac{x}{\pi}\left[\left(t^2+t+1\right)-(t+1)\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{U(x,t)=1+t+\frac{x}{\pi}t^2} \;\cdots\cdots\cdots(5)$$

وكما أنَّ:

$$U(x,0)=1 \;,\; U_t(x,t)=1+\frac{2}{\pi}xt \;,\; U_{xx}=0 \;\Rightarrow U_t-a^2U_{xx}=1+\frac{2}{\pi}xt-(1)^2(0)=1+\frac{2}{\pi}xt$$

أما $v(x,t)$ فهي حل المسألة الحدِّيّة التالية:

$$v_t=a^2v_{xx}+\overline{f}(x,t)$$

مع الشرط الابتدائي:

$$v(x,0)=\overline{\varphi}(x)$$

بالشروط الحدية الصفرية:

$$v(0,t)=0 \;\;,\;\; v(\ell,t)=0$$

علماً أنَّ:

$$\overline{f}(x,t)=f(x,t)-\left[U_t-a^2U_{xx}\right]=1+\frac{2}{\pi}xt+t\sin x-1-\frac{2}{\pi}xt=t\sin x$$

$$\overline{\varphi}(x)=\varphi(x)-U(x,0)=1+\sin x-1=\sin x$$

أي أنَّ $v(x,t)$ هي حل المسألة الحدية التالية:

$$v_t=v_{xx}+t\sin x \quad\cdots\cdots\cdots(1')$$

مع الشرط الابتدائي:

$$v(x,0)=\sin x \quad\cdots\cdots\cdots(2')$$

والشروط الحديَّة الصفرية:

$$v(0,t)=0 \;,\; v(\pi,t)=0 \;\cdots\cdots\cdots(3')$$

والمسألة الحدية الأخيرة هي مسألة حدية غير متجانسة بشروط حدية صفرية وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \quad\cdots\cdots\cdots(4')$$

علماً أن:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\varphi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi \quad , \quad v_n(t)=\int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2(t-\tau)}\overline{f_n}(\tau)d\tau$$

$$\overline{f_n}(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{f}\,(\xi,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

ومنه فإنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\xi\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\xi\right)d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\xi\sin(n\xi)d\xi=\frac{2}{\pi}\begin{cases}\frac{\pi}{2}\,;\, n=1\\ 0\;;\; n\neq 1\end{cases}$$

وبالتالي فإنَّ: $C_1=1\ ,\ C_n=0\ ;\ n\neq 1$، وكما أنَّ:

$$\overline{f_n}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t\sin\xi\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\xi\right)d\xi=\frac{2}{\pi}t\int_0^{\pi}\sin\xi\sin(n\xi)d\xi=\frac{2}{\pi}t\begin{cases}\frac{\pi}{2}\;;\; n=1\\ 0\;;\, n\neq 1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\overline{f_n}(t)=\begin{cases}t\;;\; n=1\\ 0\;;\, n\neq 1\end{cases}$$

وبما أنَّ $\overline{f_n}(t)=0$ من أجل $n\neq 1$ فإنَّ $v_n(t)=0\ ;\ n\neq 1$ ، ومنه:

$$v_1(t)=\int_0^t e^{-\left(\frac{(1)\pi(1)}{\pi}\right)^2(t-\tau)}\tau\,d\tau=e^{-t}\int_0^t e^{\tau}\tau\,d\tau=e^{-t}\left[e^{\tau}(\tau-1)\right]_0^t=e^{-t}\left[e^t(t-1)+1\right]=t-1+e^{-t}$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في الحل $(4')$ نجد أنَّ:

$$v(x,t)=e^{-t}\sin x+\left(t-1+e^{-t}\right)\sin x=\left(t-1+e^{-t}+e^{-t}\right)\sin x=\left(t-1+2e^{-t}\right)\sin x\ \Rightarrow$$

$$\boxed{v(x,t)=\left(t-1+2e^{-t}\right)\sin x}\ \cdots\cdots\cdots(5')$$

وبتعويض العلاقتين $(5),(5')$ في العلاقة (4) نجد أن الحل العام للمسألة الحدية المعطاة هو:

$$\boxed{u(x,t)=1+t+\frac{x}{\pi}t^2+\left(t-1+2e^{-t}\right)\sin x}$$

ملاحظة هامة:

في حال أعطيت الشروط الحدية بالشكل: $u(\ell,t)=0\ ,\ u_x(0,t)=\mu_1(t)$ عندئذٍ فإننا نختار الدالة $U(x,t)$ بالشكل:

$$U(x,t)=x\,\mu_1(t)+\frac{x^2}{\ell}\left[\frac{\mu_2(t)}{\ell}-\mu_1(t)\right]$$

ونبدل في باقي الدساتير كل n بـ $\frac{2n+1}{2}$ وكل $\sin$ بـ $\cos$ والسلسلة تبدأ من الصفر.

❻(الفصل الثاني للعام 2005 – 2006): أوجد حل المعادلة:

$$u_t = u_{xx} + t(x+1) \ , (0<x<1, t>0) \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشرط الابتدائي: $u(x,0) = x \quad \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية غير المتجانسة: $u_x(0,t) = t^2 \ , \ u(1,t) = t^2 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$

الحـل: إن المسألة الحدية المعطاة غير متجانسة بشروط حدية غير صفرية وفيها :

$$a=1, \ell=1 \ , \ f(x,t) = t(1+x) \ , \ \varphi(x) = x \ , \ \mu_1(t) = t^2 \ , \ \mu_2(t) = t^2$$

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t) = U(x,t) + v(x,t) \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

علماً أنَّ:

$$U(x,t) = x\mu_1(t) + \frac{x^2}{\ell}\left[\frac{\mu_2(t)}{\ell} - \mu_1(t)\right] = xt^2 + \frac{x^2}{1}\left[\frac{t^2}{1} - t^2\right] = xt^2$$

وكما أنَّ:

$$U(x,0) = 0 \ , \ U_t(x,t) = 2xt \ , \ U_{xx} = 0 \ \Rightarrow U_t - a^2U_{xx} = 2xt - 0 = 2xt$$

أما $v(x,t)$ فهي حل المسألة الحديَّة التالية:

$$v_t = a^2 v_{xx} + \bar{f}(x,t)$$

مع الشرط الابتدائي: $v(x,0) = \bar{\varphi}(x)$

بالشروط الحدية الصفرية: $v_x(0,t) = 0 \ , \ v(\ell,t) = 0$

علماً أنَّ:

$$\bar{f}(x,t) = f(x,t) - \left[U_t - a^2U_{xx}\right] = t(x+1) - [2xt] = t(1-x)$$

$$\bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - U(x,0) = x - 0 = x$$

أي أنَّ $v(x,t)$ هي حل المسألة الحدية التالية:

$$v_t = v_{xx} + t(1-x) \quad \cdots\cdots\cdots(1')$$

مع الشرط الابتدائي: $v(x,0) = x \quad \cdots\cdots\cdots(2')$

والشروط الحديَّة الصفرية: $v_x(0,t) = 0 \ , \ v(1,t) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots(3')$

والمسألة الحدية الأخيرة هي مسألة حدية غير متجانسة بشروط حدية صفرية وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2\ell}\right)^2 t} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}x\right) + \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}x\right) \quad \cdots\cdots\cdots(4')$$

علماً أن:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\varphi}(\xi)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\xi\right)d\xi \quad , \quad v_n(t)=\int_0^t e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2\ell}\right)^2(t-\tau)}\overline{f_n}(\tau)d\tau$$

$$\overline{f_n}(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{f}(\xi,t)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\xi\right)d\xi$$

ومنه فإنَّ:

$$C_n=\frac{2}{1}\int_0^1\xi\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\xi\right)d\xi=$$

$$=2\left[\frac{2}{(2n+1)\pi}\xi\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\xi\right)\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=1}-\frac{2}{(2n+1)\pi}\int_0^1\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\xi\right)d\xi\right]$$

$$=2\left[\frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi}+\frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}\left[\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\xi\right)\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=1}\right]\right]$$

$$=2\left[\frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi}-\frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}\right]=\frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}\left[(-1)^n(2n+1)\pi-2\right]$$

وكما أنَّ:

$$\overline{f_n}(t)=\frac{2}{1}\int_0^1 t(1-\xi)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\xi\right)d\xi=2t\int_0^1(1-\xi)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\xi\right)d\xi$$

$$=2t\left[\frac{2}{(2n+1)\pi}(1-\xi)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\xi\right)\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=1}+\frac{2}{(2n+1)\pi}\int_0^1\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\xi\right)d\xi\right]$$

$$=2t\left[0-\frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}\left[\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\xi\right)\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=1}\right]\right]=\frac{8t}{(2n+1)^2\pi^2}$$

وبالتالي فإنَّ:

$$v_n(t)=\int_0^t e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^2(t-\tau)}\frac{8\tau}{(2n+1)^2\pi^2}d\tau=\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\int_0^t\tau e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^2(t-\tau)}d\tau$$

$$=\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^2 t}\int_0^t\tau e^{\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^2\tau}d\tau$$

$$=\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^2 t}\left[\frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}\tau e^{\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^2\tau}\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t}-\frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}\int_0^t e^{\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^2\tau}\right]$$

$$=\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^2 t}\left[\frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}t\,e^{\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^2 t}-\frac{16}{(2n+1)^4\pi^4}\left[e^{\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^2\tau}\right]_{\tau=0}^{\tau=t}\right]$$

$$=\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^2 t}\left[\frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}t\,e^{\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^2 t}-\frac{16}{(2n+1)^4\pi^4}\left[e^{\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^2 t}-1\right]\right]$$

$$=\frac{32}{(2n+1)^6\pi^6}\left[(2n+1)^2\pi^2 t-4\left[1-e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^2 t}\right]\right]$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في الحل $(4')$ نجد أنَّ:

$$v(x,t)=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[(-1)^n(2n+1)\pi-2\right]}{(2n+1)^2}e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^2 t}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right)+$$

$$+\frac{32}{\pi^6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}\left[(2n+1)^2\pi^2 t-4\left[1-e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^2 t}\right]\right]\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right)\quad\cdots\cdots\cdots(5')$$

وبتعويض العلاقتين $(5),(5')$ في العلاقة (4) نجد أن الحل العام للمسألة الحدية المعطاة هو:

$$u(x,t)=xt^2+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[(-1)^n(2n+1)\pi-2\right]}{(2n+1)^2}e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^2 t}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right)+$$
$$+\frac{32}{\pi^6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}\left[(2n+1)^2\pi^2 t-4\left[1-e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^2 t}\right]\right]\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right)$$

معادلة التوصيل الحراري المتجانسة على مستقيم لانهائي(لا توجد شروط حدية):

إنَّ حل المعادلة:

$$u_t = a^2 u_{xx} \ , \ -\infty < x < +\infty \ , \ 0 < t < T \ \cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشرط الابتدائي: $u(x\,,0) = \varphi(x) \ , \ 0 \le t \le T \ \cdots\cdots\cdots(2)$

يعطى بالدستور التالي:

$$u(x\,,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}}$$

معادلة التوصيل الحراري غير المتجانسة على مستقيم لانهائي(لا توجد شروط حدية):

إنَّ حل المعادلة:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f\,(x\,,t), \ -\infty < x < +\infty \ , \ 0 < t < T \ \cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشرط الابتدائي: $u(x\,,0) = \varphi(x) \ , \ 0 \le t \le T \ \cdots\cdots\cdots(2)$

يعطى بالدستور التالي:

$$u(x\,,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 (t-\tau)}} f\,(\xi, \tau) \frac{d\xi}{2a\sqrt{t-\tau}} d\tau$$

❼**(الفصل الأول للعام 2004 – 2005):** أوجد حل المعادلة:

$$u_t = u_{xx} + 3t^2 \ \cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشرط الابتدائي: $u(x\,,0) = \sin x \ \cdots\cdots\cdots(2)$

الحـل:

إن هذه المعادلة هي معادلة انتشار الحرارة على مستقيم لانهائي الطول وغير المتجانسة ، وفيها:

$$a = 1 \ , \ f\,(x\,,t) = 3t^2 \ , \varphi(x) = \sin x$$

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$u(x\,,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{t} \int_{-\infty}^{+\infty} f\,(\xi, \tau)\, e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 (t-\tau)}} \frac{d\xi}{2a\sqrt{(t-\tau)}} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} I_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} I_2 \ \cdots\cdots\cdots(3)$$

ولنوجد كل من $I_1 \ , I_2$:

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\frac{d\xi}{2a\sqrt{t}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\xi\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}\frac{d\xi}{2\sqrt{t}}$$

ولحل هذا التكامل نجري التحويل التالي:

$$\frac{\xi-x}{2\sqrt{t}}=z\quad\Rightarrow\quad\frac{d\xi}{2\sqrt{t}}=dz\quad,\quad\xi=x+2\sqrt{t}\,z\quad,\quad\begin{cases}\xi=-\infty\ \Rightarrow\ z=-\infty\\ \xi=+\infty\ \Rightarrow\ z=+\infty\end{cases}$$

ومنه نجد أنَّ:

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(x+2\sqrt{t}\,z\right)e^{-z^2}dz=\sin x\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\left(2\sqrt{t}\,z\right)e^{-z^2}dz+\cos x\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(2\sqrt{t}\,z\right)e^{-z^2}dz}_{=0}=$$

$$=\sin x\left[\sqrt{\pi}e^{-\frac{\left(2\sqrt{t}\right)^2}{4}}\right]=\sqrt{\pi}\,e^{-t}\sin x$$

حيث أن التكامل الثاني هو تكامل لدالة فردية على مجال متناظر فقيمته تساوي الصفر.

إيجاد I_2:

$$I_2=\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}\frac{d\xi}{2a\sqrt{(t-\tau)}}d\tau=\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}3\tau^2\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}}\frac{d\xi}{2\sqrt{(t-\tau)}}d\tau=$$

$$=\int_0^t 3\tau^2\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}}\frac{d\xi}{2\sqrt{(t-\tau)}}\right]d\tau\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}}\frac{d\xi}{2\sqrt{(t-\tau)}}$$

ولحل هذا التكامل نجري التحويل التالي:

$$\frac{\xi-x}{2\sqrt{t-\tau}}=z\quad\Rightarrow\quad\frac{d\xi}{2\sqrt{t-\tau}}=dz\quad,\quad\xi=x+2\sqrt{t-\tau}\,z\quad,\quad\begin{cases}\xi=-\infty\ \Rightarrow\ z=-\infty\\ \xi=+\infty\ \Rightarrow\ z=+\infty\end{cases}$$

ومنه فإنَّ:

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz=\sqrt{\pi}$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$I_2=\int_0^t 3\tau^2\left[\sqrt{\pi}\right]d\tau=\sqrt{\pi}\int_0^t 3\tau^2 d\tau=\sqrt{\pi}\left[\tau^3\right]_{\tau=0}^{\tau=t}=\sqrt{\pi}t^3$$

وبتعويض كل من I_2 , I_1 في العلاقة (3) نجد أنَّ:

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\pi}e^{-t}\sin x\right)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\pi}t^3\right)=e^{-t}\sin x+t^3 \Rightarrow$$

$$\boxed{u(x,t)=e^{-t}\sin x+t^3}$$

❽(هام): أوجد حل المعادلة:

$$u_t=u_{xx}+e^t\sin x \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشرط الابتدائي:

$$u(x,0)=\sin x \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

الحـل: إن هذه المعادلة هي معادلة انتشار الحرارة على مستقيم لانهائي الطول وغير المتجانسة ، وفيها:

$$a=1\ ,\ f(x,t)=e^t\sin x\ ,\ \varphi(x)=\sin x$$

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\frac{d\xi}{2a\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}\frac{d\xi}{2a\sqrt{(t-\tau)}}d\tau=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}I_1+\frac{1}{\sqrt{\pi}}I_2 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

ولنوجد كل من I_2 , I_1 :

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\frac{d\xi}{2a\sqrt{t}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\xi\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}\frac{d\xi}{2\sqrt{t}}$$

ولحل هذا التكامل نجري التحويل التالي:

$$\frac{\xi-x}{2\sqrt{t}}=z \Rightarrow \frac{d\xi}{2\sqrt{t}}=dz \quad , \quad \xi=x+2\sqrt{t}z \quad , \quad \begin{cases}\xi=-\infty \Rightarrow z=-\infty\\ \xi=+\infty \Rightarrow z=+\infty\end{cases}$$

ومنه نجد أنَّ:

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(x+2\sqrt{t}z\right)e^{-z^2}dz=\sin x\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\left(2\sqrt{t}z\right)e^{-z^2}dz+\cos x\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(2\sqrt{t}z\right)e^{-z^2}dz}_{=0}=$$

$$=\sin x\left[\sqrt{\pi}e^{-\frac{\left(2\sqrt{t}\right)^2}{4}}\right]=\sqrt{\pi}e^{-t}\sin x$$

حيث أن التكامل الثاني هو تكامل لدالة فردية على مجال متناظر فقيمته تساوي الصفر.

إيجاد I_2:

$$I_2=\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\xi,\tau\right)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}\frac{d\xi}{2a\sqrt{(t-\tau)}}d\tau=\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\tau}\sin\xi\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}}\frac{d\xi}{2\sqrt{(t-\tau)}}d\tau=$$

$$=\int_0^t e^{\tau}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\xi\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}}\frac{d\xi}{2\sqrt{(t-\tau)}}\right]d\tau\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

إن التكامل الداخلي في I_2 هو نفسه التكامل I_1 بعد تبديل كل t بـ $t-\tau$ وبالتالي فإن ناتجه هو ناتج التكامل I_1 بعد تبديل كل t بـ $t-\tau$ أي أنَّ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\xi\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}}\frac{d\xi}{2\sqrt{(t-\tau)}}=\sqrt{\pi}\,e^{-(t-\tau)}\sin x$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$I_2=\int_0^t e^{\tau}\left[\sqrt{\pi}\,e^{-(t-\tau)}\sin x\right]d\tau=\sqrt{\pi}\sin x e^{-t}\int_0^t e^{2\tau}d\tau=\sqrt{\pi}\sin x\, e^{-t}\,\frac{1}{2}\left[e^{2\tau}\right]_0^t=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sin x\, e^{-t}\left[e^{2t}-1\right]=\sqrt{\pi}\sin x\left[\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right]=\sqrt{\pi}\sin x\ \mathrm{sht}$$

وبتعويض كل من $I_2\,,I_1$ في العلاقة (3) نجد أنَّ:

$$u\left(x,t\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\pi}\,e^{-t}\sin x\right)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\pi}\sin x\ \mathrm{sht}\right)=e^{-t}\sin x+\sin x\ \mathrm{sht}\Rightarrow$$

$$u\left(x,t\right)=\left(e^{-t}+\mathrm{sht}\right)\sin x=\left(\frac{2e^{-t}}{2}+\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)\sin x=\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)\sin x=\sin x\,\mathrm{cht}\ \Rightarrow$$

$$\boxed{u\left(x,t\right)=\sin x\,\mathrm{cht}}$$

المعادلة من النمط المكافئ وذات الأمثال الثابتة:

$$u_t=a^2u_{xx}+bu_x+cu+f\left(x,t\right)\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحققة للشرط الابتدائي: $u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right)\cdots\cdots\cdots(2)$

يعطى حل المسألة وفق التحويل التالي:

$$u\left(x,t\right)=e^{\left[c-\frac{b^2}{4a^2}\right]t-\frac{b}{2a^2}x}v\left(x,t\right)\ \cdots\cdots\cdots(3)$$

نشتق العلاقة (3) مرة بالنسبة لـ t ومرتين بالنسبة لـ x ثم نعوض في $(1)\,,(2)$ لنحصل على مسألة جديدة من الشكل:

$$v_t=a^2v_{xx}+\overline{f}\left(x,t\right)\ \cdots\cdots\cdots(1')$$

والمحققة للشرط الابتدائي: $v(x,0)=\overline{\varphi}(x)\cdots\cdots\cdots(2')$

علماً أنَّ:

$$\overline{f}(x,t)=f(x,t)e^{\left[\frac{b^2}{4a^2}-c\right]t+\frac{b}{2a^2}x} \quad , \quad \overline{\varphi}(x)=\varphi(x)e^{\frac{b}{2a^2}x}$$

وحل المسألة الجديدة قد مرَّ معنا سابقاً.

❾**(الفصل الأول للعام 2014 – 2015):** أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية من النمط المكافئ:

$$u_t-u_{xx}+2u_x-2u=\cos t\sin x\, e^x$$

والموافق للشرط الابتدائي الآتي: $u(x,0)=e^x\cos x$

الحـل:

إن المعادلة المعطاة من النمط المكافئ وذات أمثال ثابتة وتكتب بالشكل:

$$u_t=u_{xx}-2u_x+2u+\cos t\sin x\, e^x \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

والشرط الابتدائي: $u(x,0)=e^x\cos x \quad\cdots\cdots\cdots(2)$

وفيها: $a=1\ ,\ b=-2\ ,\ c=2\ ,\ f(x,t)=\cos t\sin x\, e^x$

ولحلها نجري التحويل التالي:

$$u(x,t)=e^{\left[c-\frac{b^2}{4a^2}\right]t-\frac{b}{2a^2}x}v(x,t) \Rightarrow u(x,t)=e^{\left[2-\frac{(-2)^2}{4(1)^2}\right]t-\frac{-2}{2(1)^2}x}v(x,t) \Rightarrow$$

$$u(x,t)=e^{x+t}v(x,t) \quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

باشتقاق العلاقة (3) مرة بالنسبة لـ t ومرتين بالنسبة لـ x ثم التعويض في (1) , (2) نجد أنَّ:

$$v_t=v_{xx}+\cos t\sin x\, e^x[e^{-x-t}] \Rightarrow v_t=v_{xx}+e^{-t}\cos t\sin x$$

$$v(x,0)=\cos x\, e^x(e^{-x})=\cos x$$

وبالتالي فالمسألة الجديدة هي:

$$v_t=v_{xx}+e^{-t}\cos t\sin x \quad\cdots\cdots\cdots(1')$$

$$v(x,0)=\cos x \quad\cdots\cdots\cdots(2')$$

وهذه المسألة الجديدة فيها: $a=1$, $\overline{f}(x,t)=e^{-t}\cos t\sin x$, $\overline{\varphi}(x)=\cos x$ ، وهي معادلة انتشار الحرارة على مستقيم لانهائي الطول وغير المتجانسة ، وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$v(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\varphi}(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\frac{d\xi}{2a\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f}(\xi,\tau)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}\frac{d\xi}{2a\sqrt{(t-\tau)}}d\tau=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}I_1+\frac{1}{\sqrt{\pi}}I_2 \quad\cdots\cdots\cdots(3')$$

ولنوجد كل من $I_1 \, , \, I_2$:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi}(\xi)\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\xi\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} \frac{d\xi}{2\sqrt{t}}$$

ولحل هذا التكامل نجري التحويل التالي:

$$\frac{\xi - x}{2\sqrt{t}} = z \quad \Rightarrow \quad \frac{d\xi}{2\sqrt{t}} = dz \quad , \quad \xi = x + 2\sqrt{t}\,z \quad , \quad \begin{cases} \xi = -\infty \ \Rightarrow \ z = -\infty \\ \xi = +\infty \ \Rightarrow \ z = +\infty \end{cases}$$

ومنه نجد أنَّ:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(x + 2\sqrt{t}\,z\right) e^{-z^2} dz = \cos x \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(2\sqrt{t}\,z\right) e^{-z^2} dz - \sin x \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(2\sqrt{t}\,z\right) e^{-z^2} dz}_{=0} =$$

$$= \cos x \left[\sqrt{\pi} e^{-\frac{\left(2\sqrt{t}\right)^2}{4}} \right] = \sqrt{\pi}\, e^{-t} \cos x$$

حيث أن التكامل الثاني هو تكامل لدالة فردية على مجال متناظر فقيمته تساوي الصفر.

إيجاد I_2:

$$I_2 = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}\,(\xi, \tau)\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{d\xi}{2a\sqrt{(t-\tau)}} d\tau = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} \cos\tau \sin\xi\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}} \frac{d\xi}{2\sqrt{(t-\tau)}} d\tau =$$

$$= \int_0^t e^{-\tau} \cos\tau \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\xi\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}} \frac{d\xi}{2\sqrt{(t-\tau)}} \right] d\tau \quad \cdots\cdots\cdots (*)$$

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\xi\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}} \frac{d\xi}{2\sqrt{(t-\tau)}}$$

ولحل هذا التكامل نجري التحويل التالي:

$$\frac{\xi - x}{2\sqrt{t-\tau}} = z \quad \Rightarrow \quad \frac{d\xi}{2\sqrt{t-\tau}} = dz \quad , \quad \xi = x + 2\sqrt{t-\tau}\,z \quad , \quad \begin{cases} \xi = -\infty \ \Rightarrow \ z = -\infty \\ \xi = +\infty \ \Rightarrow \ z = +\infty \end{cases}$$

ومنه نجد أنَّ:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(x + 2\sqrt{t-\tau}\,z\right) e^{-z^2} dz =$$

$$= \sin x \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(2\sqrt{t-\tau}\,z\right) e^{-z^2} dz + \cos x \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(2\sqrt{t-\tau}\,z\right) e^{-z^2} dz}_{=0} =$$

$$=\sin x\left[\sqrt{\pi}e^{-\frac{\left(2\sqrt{t-\tau}\right)^2}{4}}\right]=\sqrt{\pi}\,e^{-(t-\tau)}\sin x$$

حيث أن التكامل الثاني هو تكامل لدالة فردية على مجال متناظر فقيمته تساوي الصفر.

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$I_2=\int_0^t e^{-\tau}\cos\tau\left[\sqrt{\pi}\,e^{-(t-\tau)}\sin x\right]d\tau=\sqrt{\pi}\,\sin x\int_0^t e^{-(t-\tau+\tau)}\cos\tau d\tau=\sqrt{\pi}\,\sin x e^{-t}\int_0^t\cos\tau d\tau$$

$$=\sqrt{\pi}\,\sin x e^{-t}\left[\sin\tau\right]_{\tau=0}^{\tau=t}=\sqrt{\pi}\,\sin x e^{-t}\left[\sin t-0\right]=\sqrt{\pi}\,\sin x e^{-t}\,\sin t$$

وبتعويض كل من I_2 , I_1 في العلاقة $(3')$ نجد أنَّ:

$$v(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\pi}e^{-t}\cos x\right)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\pi}\,\sin x e^{-t}\,\sin t\right)=e^{-t}\left[\cos x+\sin x\,\sin t\right]$$

وبالتعويض في العلاقة (3) نجد أن الحل المطلوب للمسألة المعطاة هو:

$$u(x,t)=e^{x+t}\left[e^{-t}\left(\cos x+\sin x\,\sin t\right)\right]\Rightarrow\boxed{u(x,t)=e^{x}\left(\cos x+\sin x\,\sin t\right)}$$

⑩**(الدورة الثالثة للعام 2014 – 2015):** أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية من النمط المكافئ:

$$u_t-u_{xx}-u_x-u=x\,e^{-\frac{1}{2}x}$$

والموافق للشرط الابتدائي الآتي:

$$u(x,0)=x\,e^{-\frac{1}{2}x}$$

الحـل:

إن المعادلة المعطاة من النمط المكافئ وذات أمثال ثابتة وتكتب بالشكل:

$$u_t=u_{xx}+u_x+u+x\,e^{-\frac{1}{2}x}\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

والشرط الابتدائي:

$$u(x,0)=x\,e^{-\frac{1}{2}x}\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

وفيها:

$$a=1\;,\;b=1\,,\;c=1\;,\;f(x,t)=x\,e^{-\frac{1}{2}x}$$

ولحلها نجري التحويل التالي:

$$u(x,t)=e^{\left[c-\frac{b^2}{4a^2}\right]t-\frac{b}{2a^2}x}v(x,t)\;\Rightarrow\;u(x,t)=e^{\left[1-\frac{(1)^2}{4(1)^2}\right]t-\frac{1}{2(1)^2}x}v(x,t)\;\Rightarrow$$

$$u(x,t)=e^{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}t}v(x,t)\quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

باشتقاق العلاقة (3) مرة بالنسبة لـ t ومرتين بالنسبة لـ x ثم التعويض في (1) , (2) نجد أنَّ:

$$v_t = v_{xx} + x\,e^{-\frac{1}{2}x}[e^{\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}t}] \Rightarrow v_t = v_{xx} + xe^{-\frac{3}{4}t}$$
$$v(x,0) = x\,e^{-\frac{1}{2}x}(e^{\frac{1}{2}x}) = x$$

وبالتالي فالمسألة الجديدة هي:

$$v_t = v_{xx} + xe^{-\frac{3}{4}t} \quad \cdots\cdots\cdots(1')$$
$$v(x,0) = x \quad \cdots\cdots\cdots(2')$$

وهذه المسألة الجديدة فيها: $\bar{\varphi}(x) = x$, $\bar{f}(x,t) = xe^{-\frac{3}{4}t}$, $a=1$ ، وهي معادلة انتشار الحرارة على مستقيم لانهائي الطول وغير المتجانسة ، وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{\varphi}(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\frac{d\xi}{2a\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}(\xi,\tau)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}\frac{d\xi}{2a\sqrt{(t-\tau)}}d\tau =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}I_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}I_2 \quad \cdots\cdots\cdots(3')$$

ولنوجد كل من I_2 , I_1 :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\bar{\varphi}(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\frac{d\xi}{2a\sqrt{t}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\xi\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}\frac{d\xi}{2\sqrt{t}}$$

ولحل هذا التكامل نجري التحويل التالي:

$$\frac{\xi-x}{2\sqrt{t}} = z \Rightarrow \frac{d\xi}{2\sqrt{t}} = dz \quad , \quad \xi = x + 2\sqrt{t}\,z \quad , \quad \begin{cases}\xi = -\infty \Rightarrow z = -\infty \\ \xi = +\infty \Rightarrow z = +\infty\end{cases}$$

ومنه نجد أنَّ:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(x + 2\sqrt{t}\,z\right)e^{-z^2}dz = x\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz + 2\sqrt{t}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}z\,e^{-z^2}dz}_{=0} = \sqrt{\pi}\,x$$

حيث أن التكامل الثاني هو تكامل لدالة فردية على مجال متناظر فقيمته تساوي الصفر.

إيجاد I_2:

$$I_2 = \int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}\frac{d\xi}{2a\sqrt{(t-\tau)}}d\tau = \int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\xi e^{-\frac{3}{4}\tau}\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}}\frac{d\xi}{2\sqrt{(t-\tau)}}d\tau =$$
$$= \int_0^t e^{-\frac{3}{4}\tau}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\xi e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}}\frac{d\xi}{2\sqrt{(t-\tau)}}\right]d\tau = \int_0^t e^{-\frac{3}{4}\tau}\left[x\sqrt{\pi}\right]d\tau = x\sqrt{\pi}\int_0^t e^{-\frac{3}{4}\tau}d\tau =$$

$$=-\frac{4}{3}x\sqrt{\pi}\left[e^{-\frac{3}{4}\tau}\right]_0^t=-\frac{4}{3}x\sqrt{\pi}\left[e^{-\frac{3}{4}t}-1\right]=\frac{4}{3}x\sqrt{\pi}\left[1-e^{-\frac{3}{4}t}\right]$$

حيث أن التكامل الداخلي نحصل عليه من التكامل I_1 وذلك بتبديل كل t بـ $(t-\tau)$ وبالتالي فإن قيمته نحصل عليها من قيمة التكامل I_1 وذلك بتبديل كل t بـ$(t-\tau)$.

وبتعويض كل من $I_2\,,I_1$ في العلاقة $(3')$ نجد أنَّ:

$$v(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(x\sqrt{\pi}\right)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{4}{3}x\sqrt{\pi}\left[1-e^{-\frac{3}{4}t}\right]\right)=x+\frac{4}{3}x\left[1-e^{-\frac{3}{4}t}\right]=\frac{1}{3}x\left(7-4e^{-\frac{3}{4}t}\right)$$

وبالتعويض في العلاقة (3) نجد أن الحل المطلوب للمسألة المعطاة هو:

$$u(x,t)=e^{\frac{3}{4}t-\frac{1}{2}x}\cdot\frac{1}{3}x\left(7-4e^{-\frac{3}{4}t}\right)=\frac{1}{3}xe^{-\frac{1}{2}x}\left(7e^{\frac{3}{4}t}-4\right)\Rightarrow\boxed{u(x,t)=\frac{1}{3}xe^{-\frac{1}{2}x}\left(7e^{\frac{3}{4}t}-4\right)}$$

❶❶**(الدورة الثالثة للعام 2012 – 2013):** أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية من النمط المكافئ:

$$u_t-2u_{xx}-2u=2te^{2t}$$

والموافق للشرط الابتدائي الآتي: $u(x,0)=\sin x$

الحـل: إن المعادلة المعطاة من النمط المكافئ وذات أمثال ثابتة وتكتب بالشكل:

$$u_t=2u_{xx}+2u+2te^{2t}\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

والشرط الابتدائي: $u(x,0)=\sin x\quad\cdots\cdots\cdots(2)$

وفيها: $a=\sqrt{2}\;,\;b=0\,,\;c=2\;,\;f(x,t)=2te^{2t}$

ولحلها نجري التحويل التالي:

$$u(x,t)=e^{\left[c-\frac{b^2}{4a^2}\right]t-\frac{b}{2a^2}x}v(x,t)\Rightarrow u(x,t)=e^{\left[2-\frac{(0)^2}{4(\sqrt{2})^2}\right]t-\frac{(0)}{2(\sqrt{2})^2}x}v(x,t)\Rightarrow$$
$$u(x,t)=e^{2t}v(x,t)\quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

باشتقاق العلاقة (3) مرة بالنسبة لـ t ومرتين بالنسبة لـ x ثم التعويض في $(1)\,,(2)$ نجد أنَّ:

$$v_t=2v_{xx}+2te^{2t}[e^{-2t}]\quad\Rightarrow v_t=2v_{xx}+2t$$
$$v(x,0)=\sin x$$

وبالتالي فالمسألة الجديدة هي:

$$v_t=2v_{xx}+2t\quad\cdots\cdots\cdots(1')$$
$$v(x,0)=\sin x\quad\cdots\cdots\cdots(2')$$

وهذه المسألة الجديدة فيها: $a=\sqrt{2}\ ,\ \bar{f}(x,t)=2t\ ,\ \bar{\varphi}(x)=\sin x$ ، وهي معادلة انتشار الحرارة على مستقيم لانهائي الطول وغير المتجانسة، وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$v(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{\varphi}(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\frac{d\xi}{2a\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{t}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}(\xi,\tau)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}\frac{d\xi}{2a\sqrt{(t-\tau)}}d\tau=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}I_1+\frac{1}{\sqrt{\pi}}I_2\quad\cdots\cdots\cdots(3')$$

ولنوجد كل من $I_2\ ,\ I_1$:

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{\varphi}(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\frac{d\xi}{2a\sqrt{t}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\xi\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(\sqrt{2})^2t}}\frac{d\xi}{2\sqrt{2t}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\xi\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{8t}}\frac{d\xi}{2\sqrt{2t}}$$

ولحل هذا التكامل نجري التحويل التالي:

$$\frac{\xi-x}{2\sqrt{2t}}=z\ \Rightarrow\ \frac{d\xi}{2\sqrt{2t}}=dz\quad,\ \xi=x+2\sqrt{2t}\,z\quad,\ \begin{cases}\xi=-\infty\ \Rightarrow\ z=-\infty\\ \xi=+\infty\ \Rightarrow\ z=+\infty\end{cases}$$

ومنه نجد أنَّ:

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(x+2\sqrt{2t}\,z\right)e^{-z^2}dz=$$

$$=\sin x\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\left(2\sqrt{2t}\,z\right)e^{-z^2}dz+\cos x\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(2\sqrt{2t}\,z\right)e^{-z^2}dz}_{=0}=\sin x\left[\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{\left(2\sqrt{2t}\right)^2}{4}}\right]\Rightarrow$$

$$\boxed{I_1=\sqrt{\pi}\,e^{-2t}\sin x}$$

حيث أن التكامل الثاني هو تكامل لدالة فردية على مجال متناظر فقيمته تساوي الصفر.

إيجاد I_2:

$$I_2=\int_{0}^{t}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}\frac{d\xi}{2a\sqrt{(t-\tau)}}d\tau=\int_{0}^{t}\int_{-\infty}^{+\infty}2\tau e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(\sqrt{2})^2(t-\tau)}}\frac{d\xi}{2\sqrt{2(t-\tau)}}d\tau=$$

$$=\int_{0}^{t}2\tau\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{8(t-\tau)}}\frac{d\xi}{2\sqrt{2(t-\tau)}}\right]d\tau\quad\cdots\cdots\cdots(*)$$

ولنوجد قيمة التكامل:

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{8(t-\tau)}}\frac{d\xi}{2\sqrt{2(t-\tau)}}$$

ولحل هذا التكامل نجري التحويل التالي:

$$\frac{\xi - x}{2\sqrt{2(t-\tau)}} = z \quad \Rightarrow \quad \frac{d\xi}{2\sqrt{2(t-\tau)}} = dz \quad , \quad \xi = x + 2\sqrt{2(t-\tau)}\, z \quad , \quad \begin{cases} \xi = -\infty \;\Rightarrow\; z = -\infty \\ \xi = +\infty \;\Rightarrow\; z = +\infty \end{cases}$$

ومنه نجد أنَّ:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$I_2 = \int_0^t 2\tau \left[\sqrt{\pi}\right] d\tau = \sqrt{\pi} \int_0^t 2\tau d\tau = \sqrt{\pi}\left[\tau^2\right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \sqrt{\pi}\, t^2$$

وبتعويض كل من I_2 , I_1 في العلاقة $(3')$ نجد أنَّ:

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\pi} e^{-2t} \sin x\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\pi}\, t^2\right) = e^{-2t} \sin x + t^2$$

وبالتعويض في العلاقة (3) نجد أن الحل المطلوب للمسألة المعطاة هو :

$$u(x,t) = e^{2t}\left(e^{-2t} \sin x + t^2\right) = \sin x + t^2 e^{2t} \Rightarrow \boxed{u(x,t) = \sin x + t^2 e^{2t}}$$

❶❷(الفصل الثاني للعام 2014 – 2015): أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$u_t = u_{xx} + u + \cos x \;\; , \; 0 < x < \frac{\pi}{2} \; , t > 0 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

والموافق للشرط الابتدائي الآتي: $u(x,0) = \cos x \quad \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية الصفرية الآتية: $u_x(0,t) = 0 \;\; , \;\; u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$

الحـل: إنَّ المعادلة المعطاة من النمط المكافئ وذات أمثال ثابتة وفيها:

$$a = 1 , \; b = 0 \;, \; c = 1 \;, \; f(x,t) = \cos x$$

ولحلها نجري التحويل التالي:

$$u(x,t) = e^{\left[c - \frac{b^2}{4a^2}\right]t - \frac{b}{2a^2}x} v(x,t) \;\Rightarrow\; u(x,t) = e^{\left[1 - \frac{(0)^2}{4(1)^2}\right]t - \frac{(0)}{2(1)^2}x} v(x,t) \;\Rightarrow$$

$$u(x,t) = e^t v(x,t) \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

وبالاشتقاق مرة بالنسبة t ومرتين بالنسبة لـ x ، ثم التعويض في (1) و (2) و (3) على الترتيب نجد أنَّ:

$$u_t = e^t v + e^t v_t \quad , \; u_{xx} = e^t v_{xx}$$

نعوض في (1) لنجد أنَّ:

$$e^t v + e^t v_t = e^t v_{xx} + e^t v + \cos x \quad \Rightarrow \; v_t = v_{xx} + e^{-t} \cos x$$

نعوض في (2) لنجد أنَّ:

$$\cos x = u(x,0) = e^{(0)} v(x,0) \Rightarrow v(x,0) = \cos x$$

نعوض في (3) لنجد أنَّ:

$$u = e^t v \Rightarrow u_x = e^t v_x \Rightarrow$$
$$0 = u_x(0,t) = e^t v_x(0,t) \Rightarrow v_x(0,t) = 0$$
$$0 = u\left(\frac{\pi}{2},t\right) = e^t v\left(\frac{\pi}{2},t\right) \Rightarrow v\left(\frac{\pi}{2},t\right) = 0 \; ; \; e^t \neq 0$$

وبالتالي فالمسألة الجديدة هي:

$$v_t = v_{xx} + e^{-t}\cos x \;\cdots\cdots\cdots(1')$$

مع الشرط الابتدائي: $v(x,0) = \cos x \cdots\cdots\cdots(2')$

والشروط الحدية الصفرية: $v_x(0,t) = 0 \;,\; v\left(\frac{\pi}{2},t\right) = 0 \;\cdots\cdots\cdots(3')$

وهذه المسألة الجديدة فيها: $a = 1 \,,\, \ell = \frac{\pi}{2} \,,\, \overline{f}(x,t) = e^{-t}\cos x \;,\; \overline{\varphi}(x) = \cos x$ ، وهي مسألة حدية غير متجانسة بالشروط الحدية الصفرية (والشروط الحدية تعاني من اشتقاق) وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2\ell}\right)^2 t} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}x\right) \;\cdots\cdots\cdots(4')$$

علماً أن:

$$C_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \overline{\varphi}(\xi)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\xi\right)d\xi \quad , \quad v_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2\ell}\right)^2 (t-\tau)} \overline{f_n}(\tau)\,d\tau$$
$$\overline{f_n}(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \overline{f}(\xi,t)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\xi\right)d\xi$$

ومنه فإنَّ:

$$C_n = \frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\xi)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\frac{\pi}{2}}\xi\right)d\xi = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\xi\cos\left[(2n+1)\xi\right]d\xi = \frac{4}{\pi}\begin{cases}\frac{\pi}{4} \; ; \; n = 0 \\ 0 \;\; ; \;\; n \neq 0\end{cases} \Rightarrow$$
$$C_n = \begin{cases}1 \; ; \; n = 0 \\ 0 \;\; ; \;\; n \neq 0\end{cases}$$

وكما أنَّ:

$$\overline{f_n}(t)=\frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t}\cos(\xi)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\frac{\pi}{2}}\xi\right)d\xi=\frac{4}{\pi}e^{-t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\xi\cos\left[(2n+1)\xi\right]d\xi=$$

$$=\frac{4}{\pi}e^{-t}\begin{cases}\frac{\pi}{4}\,;\,n=0\\0\;;\;n\neq 0\end{cases}\Rightarrow f_n(t)=\begin{cases}e^{-t}\;;\,n=0\\0\;;\;n\neq 0\end{cases}$$

وبما أن $f_n(t)=0\ ,\ n\neq 0$ فإنَّ $v_n(t)=0\ ;\ n\neq 0$ وبالتالي يكون:

$$v_0(t)=\int_0^t e^{-\left(\frac{(2(0)+1)\pi(1)}{2\frac{\pi}{2}}\right)^2(t-\tau)}\overline{f_0}(\tau)d\tau=\int_0^t e^{-(t-\tau)}.e^{-\tau}d\tau=e^{-t}\int_0^t d\tau=t\,e^{-t}\;\Rightarrow$$

$$v_n(t)=\begin{cases}t\,e^{-t}\ ,\ n=0\\0\quad\ ,\ n\neq 0\end{cases}$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في الحل $(4')$ نجد أنَّ:

$$v(x,t)=e^{-t}\cos x+te^{-t}\cos x=(1+t)e^{-t}\cos x\;\Rightarrow\;\boxed{v(x,t)=(1+t)e^{-t}\cos x}\;\cdots\cdots\cdots(5')$$

وبتعويض العلاقة $(5')$ في العلاقة (4) نجد أن الحل العام للمسألة الحدية المعطاة هو:

$$\boxed{u(x,t)=e^{t}\left[(1+t)e^{-t}\cos x\;\right]=(1+t)\cos x}$$

❸❶**(الفصل الثاني للعام 2010 – 2011)**: أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$u_t-u_{xx}+2u_x=e^{x-t}\sin\pi x-e^{x-2t}\ ,\ 0<x<1\,,\ t>0$$

والموافق للشرط الابتدائي الآتي: $u(x\,,0)=e^{x}(1+\sin\pi x)$

والشروط الحدية: $u(0,t)=e^{-2t}\ ,\ u(1,t)=e^{1-2t}$

الحل: إن المعادلة المعطاة تكتب بالشكل:

$$u_t=u_{xx}-2u_x+e^{x-t}\sin\pi x-e^{x-2t}\ ,\ 0<x<1\,,\ t>0\qquad\cdots\cdots\cdots(1)$$

والموافق للشرط الابتدائي الآتي: $u(x\,,0)=e^{x}(1+\sin\pi x)\quad\cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية: $u(0,t)=e^{-2t}\ ,\ u(1,t)=e^{1-2t}\quad\cdots\cdots\cdots(3)$

وهذه المعادلة من النمط المكافئ وذات أمثال ثابتة وفيها:

$$a=1\,,\ b=-2\ ,\ c=0\ ,\ f(x,t)=e^{x-t}\sin\pi x-e^{x-2t}\ ,\ \varphi(x)=e^{x}(1+\sin\pi x)$$

$$\mu_1(t)=e^{-2t}\ ,\ \mu_2(t)=e^{1-2t}$$

ولحلها نجري التحويل التالي:

$$u(x,t)=e^{\left[c-\frac{b^2}{4a^2}\right]t-\frac{b}{2a^2}x}v(x,t) \Rightarrow u(x,t)=e^{\left[0-\frac{(-2)^2}{4(1)^2}\right]t-\frac{(-2)}{2(1)^2}x}v(x,t) \Rightarrow$$

$$u(x,t)=e^{x-t}v(x,t) \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

وبالاشتقاق مرة بالنسبة t ومرتين بالنسبة لـ x ، ثم التعويض في (1) و (2) و (3) على الترتيب نجد أنَّ:

نعوض في (3) لنجد أنَّ:

$$e^{-2t}=u(0,t)=e^{-t}v(0,t) \Rightarrow v(0,t)=e^{-t}$$

$$e^{1-2t}=u(1,t)=e^{1-t}v(1,t) \Rightarrow v(1,t)=e^{-t}$$

وبالتالي فالمسألة الجديدة هي:

$$v_t=v_{xx}+\sin\pi x-e^{-t} \quad \cdots\cdots\cdots(1')$$

مع الشرط الابتدائي: $$v(x,0)=e^{-x}\left[e^{x}(1+\sin\pi x)\right]=1+\sin\pi x \quad \cdots\cdots\cdots(2')$$

والشروط الحدية: $$v(0,t)=e^{-t}\ ,\ v(1,t)=e^{-t} \quad \cdots\cdots\cdots(3')$$

وهذه المسألة الجديدة فيها:

$$a=1,\ \ell=1,\ \overline{f}(x,t)=\sin\pi x-e^{-t}\ ,\ \overline{\varphi}(x)=1+\sin\pi x\ ,\ \overline{\mu_1}(t)=e^{-t}\ ,\ \overline{\mu_2}(t)=e^{-t}$$

، وهي مسألة حدية غير متجانسة بالشروط الحدية غير الصفرية وحلها يعطى بالشكل:

$$v(x,t)=V(x,t)+w(x,t) \quad \cdots\cdots\cdots(4')$$

حيث أنَّ:

$$V(x,t)=\overline{\mu_1}(t)+\frac{x}{\ell}\left[\overline{\mu_2}(t)-\overline{\mu_1}(t)\right]=e^{-t}+\frac{x}{1}\left[e^{-t}-e^{-t}\right]=e^{-t}$$

$$V(x,0)=1\ ,\ V_t=-e^{-t}\ ,\ V_{xx}=0$$

أما $w(x,t)$ فهي حل المسألة الحدية التالية:

$$w_t=a^2w_{xx}+\overline{\overline{f}}(x,t)$$

بالشرط الابتدائي: $$w(x,0)=\overline{\overline{\varphi}}(x)$$

وبالشروط الحدية الصفرية: $$w(0,t)=0\ ,\ w(\ell,t)=0$$

علماً أنَّ:

$$\overline{\overline{f}}(x,t)=\overline{f}(x,t)-\left[V_t-a^2V_{xx}\right]=\sin\pi x-e^{-t}-\left[-e^{-t}-0\right]=\sin\pi x$$

$$\overline{\overline{\varphi}}(x)=\overline{\varphi}(x)-V(x,0)=1+\sin\pi x-1=\sin\pi x$$

أي أن المسألة الجديدة هي:

$$w_t=w_{xx}+\sin\pi x \quad \cdots\cdots\cdots(1'')$$

بالشرط الابتدائي:
$$w(x,0)=\sin \pi x \quad \cdots\cdots\cdots(2'')$$
وبالشروط الحدية الصفرية:
$$w(0,t)=0\ ,\ \ w(1,t)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(3'')$$
وحلها يعطى بالدستور التالي:
$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}w_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \quad \cdots\cdots\cdots(4'')$$
علماً أنَّ:
$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\overline{\varphi}}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi \quad , \quad w_n(t)=\int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2(t-\tau)}\overline{\overline{f_n}}(\tau)d\tau$$
$$\overline{\overline{f_n}}(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\overline{f}}(\xi,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$
وبالتالي فإنَّ:
$$C_n=\frac{2}{1}\int_0^1\sin(\pi\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{1}\xi\right)d\xi=2\int_0^1\sin(\pi\xi)\sin(n\pi\xi)d\xi=2\begin{cases}\frac{1}{2}\ , n=1\\ 0\ \ , n\neq 1\end{cases}\Rightarrow$$
$$C_n=\begin{cases}1\ , n=1\\ 0\ \ , n\neq 1\end{cases}$$
وكما أنَّ:
$$\overline{\overline{f_n}}(t)=\frac{2}{1}\int_0^1\sin(\pi\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{1}\xi\right)d\xi=2\int_0^1\sin(\pi\xi)\sin(n\pi\xi)d\xi=2\begin{cases}\frac{1}{2}\ , n=1\\ 0\ \ , n\neq 1\end{cases}\Rightarrow$$
$$\overline{\overline{f_n}}(t)=\begin{cases}1\ , n=1\\ 0\ \ , n\neq 1\end{cases}$$
وبما أنَّ $\overline{\overline{f_n}}(t)=0$ من أجل $n\neq 1$ ، فإن $w_n(t)=0$ من أجل $n\neq 1$ ، وبالتالي:
$$w_1(t)=\int_0^t e^{-\left(\frac{(1)\pi(1)}{1}\right)^2(t-\tau)}(1)d\tau=\int_0^t e^{-\pi^2(t-\tau)}d\tau=e^{-\pi^2 t}\int_0^t e^{\pi^2\tau}d\tau=e^{-\pi^2 t}\left[\frac{1}{\pi^2}e^{\pi^2\tau}\right]_{\tau=0}^{\tau=t}=$$
$$=e^{-\pi^2 t}\left[\frac{1}{\pi^2}\left(e^{\pi^2 t}-1\right)\right]=\frac{1}{\pi^2}\left(1-e^{-\pi^2 t}\right)$$
وبالاستفادة مما سبق والتعويض في الحل $(4')$ نجد أنَّ:
$$w(x,t)=e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)+\frac{1}{\pi^2}\left(1-e^{-\pi^2 t}\right)\sin(\pi x)=\frac{1}{\pi^2}\left[\pi^2 e^{-\pi^2 t}+1-e^{-\pi^2 t}\right]\sin(\pi x)\Rightarrow$$
$$\boxed{w(x,t)=\frac{1}{\pi^2}\left[\left(\pi^2-1\right)e^{-\pi^2 t}+1\right]\sin(\pi x)} \quad \cdots\cdots\cdots(5'')$$

وبتعويض العلاقة $(5'')$ في العلاقة $(4')$ نجد أن الحل العام للمسألة الحدية المعطاة هو :

$$\boxed{v(x,t)=e^{-t}+\frac{1}{\pi^2}\left[\left(\pi^2-1\right)e^{-\pi^2 t}+1\right]\sin(\pi x)}\quad\cdots\cdots\cdots(5')$$

وبالتعويض في العلاقة (4) نجد أن الحل المطلوب للمسألة المعطاة هو :

$$u(x,t)=e^{x-t}\left[e^{-t}+\frac{1}{\pi^2}\left[\left(\pi^2-1\right)e^{-\pi^2 t}+1\right]\sin(\pi x)\right]$$

❹❶**(الفصل الأول للعام 2015 – 2016)**: أوجد حل المعادلة:

$$u_t=u_{xx}+2u_x+2u+e^{-x}\sin x\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشرط الابتدائي:

$$u(x,0)=e^{-x}\sin x\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

الحـل:

إن المعادلة المعطاة من النمط المكافئ وذات أمثال ثابتة وفيها:

$$a=1\ ,\ b=2\ ,\ c=2\ ,\ f(x,t)=e^{-x}\sin x$$

ولحلها نجري التحويل التالي:

$$u(x,t)=e^{\left[c-\frac{b^2}{4a^2}\right]t-\frac{b}{2a^2}x}v(x,t)\ \Rightarrow\ u(x,t)=e^{\left[2-\frac{(2)^2}{4(1)^2}\right]t-\frac{2}{2(1)^2}x}v(x,t)\ \Rightarrow$$

$$u(x,t)=e^{-x+t}v(x,t)\quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

باشتقاق العلاقة (3) مرة بالنسبة لـ t ومرتين بالنسبة لـ x ثم التعويض في $(1),(2)$ نجد أنَّ:

$$v_t=v_{xx}+e^{-x}\sin x[e^{x-t}]\ \Rightarrow\ v_t=v_{xx}+e^{-t}\sin x$$

$$v(x,0)=e^{-x}\sin x(e^{x})=\sin x$$

وبالتالي فالمسألة الجديدة هي:

$$v_t=v_{xx}+e^{-t}\sin x\quad\cdots\cdots\cdots(1')$$

$$v(x,0)=\sin x\quad\cdots\cdots\cdots(2')$$

وهذه المسألة الجديدة فيها: $a=1\ ,\ \bar{f}(x,t)=e^{-t}\sin x\ ,\ \bar{\varphi}(x)=\sin x$ ، وهي معادلة انتشار الحرارة على مستقيم لانهائي الطول وغير المتجانسة ، وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$v(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{\varphi}(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\frac{d\xi}{2a\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}(\xi,\tau)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}\frac{d\xi}{2a\sqrt{(t-\tau)}}d\tau=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}I_1+\frac{1}{\sqrt{\pi}}I_2\quad\cdots\cdots\cdots(3')$$

ولنوجد كل من $I_2 \, , \, I_1$:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}(\xi)\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\xi \, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} \frac{d\xi}{2\sqrt{t}}$$

ولحل هذا التكامل نجري التحويل التالي:

$$\frac{\xi - x}{2\sqrt{t}} = z \quad \Rightarrow \frac{d\xi}{2\sqrt{t}} = dz \quad , \; \xi = x + 2\sqrt{t}\, z \quad , \begin{cases} \xi = -\infty \; \Rightarrow \; z = -\infty \\ \xi = +\infty \; \Rightarrow \; z = +\infty \end{cases}$$

ومنه نجد أنَّ:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(x + 2\sqrt{t}\, z\right) e^{-z^2} dz = \sin x \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(2\sqrt{t}\, z\right) e^{-z^2} dz + \cos x \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(2\sqrt{t}\, z\right) e^{-z^2} dz}_{=0} =$$

$$= \sin x \left[\sqrt{\pi} e^{-\frac{\left(2\sqrt{t}\right)^2}{4}} \right] = \sqrt{\pi}\, e^{-t} \sin x$$

حيث أن التكامل الثاني هو تكامل لدالة فردية على مجال متناظر فقيمته تساوي الصفر.

إيجاد I_2:

$$I_2 = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} f\,(\xi, \tau)\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{d\xi}{2a\sqrt{(t-\tau)}} d\tau = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} \sin\xi \, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}} \frac{d\xi}{2\sqrt{(t-\tau)}} d\tau =$$

$$= \int_0^t e^{-\tau} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\xi \, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}} \frac{d\xi}{2\sqrt{(t-\tau)}} \right] d\tau = \int_0^t e^{-\tau} \left[\sqrt{\pi}\, e^{-(t-\tau)} \sin x \right] d\tau =$$

$$= \sqrt{\pi} \sin x \int_0^t e^{-(t-\tau+\tau)} d\tau = \sqrt{\pi} \sin x \, e^{-t} \int_0^t d\tau = \sqrt{\pi}\, t e^{-t} \sin x$$

وبتعويض كل من $I_2 \, , \, I_1$ في العلاقة $(3')$ نجد أنَّ:

$$v\,(x\,,t\,) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{\pi} e^{-t} \sin x \right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{\pi}\, t e^{-t} \sin x \right) = (1+t\,) e^{-t} \sin x$$

وبالتعويض في العلاقة (3) نجد أن الحل المطلوب للمسألة المعطاة هو:

$$u\,(x\,,t\,) = e^{-x+t} \left[(1+t\,) e^{-t} \sin x \right] \; \Rightarrow \boxed{u\,(x\,,t\,) = (1+t\,)\, e^{-x} \sin x}$$

❺❶(**الدورة الثالثة للعام 2013 – 2014**): أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$u_t = u_{xx} - 2u_x + xe^{x-t} \ , \left(0 < x < 1 \ , \ t > 0\right) \ \cdots\cdots\cdots(1)$$

والموافق للشرط الابتدائي الآتي: $u\left(x \ , 0\right) = e^x \ \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية: $u\left(0, t\right) = e^{-t} \ , \ u\left(1, t\right) = 0 \ \cdots\cdots\cdots(3)$

الحـل: إن المعادلة المعطاة من النمط المكافئ وذات أمثال ثابتة وفيها:

$$a = 1 \ , \ b = -2 \ , \ c = 0 \ , \ f\left(x \ , t\right) = x\, e^{x-t} \ , \ \varphi\left(x\right) = e^x \ , \ \mu_1\left(t\right) = e^{-t} \ , \ \mu_2\left(t\right) = 0$$

ولحلها نجري التحويل التالي:

$$u\left(x \ , t\right) = e^{\left[c - \frac{b^2}{4a^2}\right]t - \frac{b}{2a^2}x} v\left(x \ , t\right) \ \Rightarrow \ u\left(x \ , t\right) = e^{\left[0 - \frac{(-2)^2}{4(1)^2}\right]t - \frac{(-2)}{2(1)^2}x} v\left(x \ , t\right) \ \Rightarrow$$

$$u\left(x \ , t\right) = e^{x-t} v\left(x \ , t\right) \ \cdots\cdots\cdots(4)$$

وبالاشتقاق مرة بالنسبة t ومرتين بالنسبة لـ x ، ثم التعويض في (1) و (2) و (3) على الترتيب نجد أنَّ:

نعوض في (3) لنجد أنَّ:

$$e^{-t} = u\left(0, t\right) = e^{-t} v\left(0, t\right) \Rightarrow v\left(0, t\right) = 1$$

$$0 = u\left(1, t\right) = e^{1-t} v\left(1, t\right) \Rightarrow v\left(1, t\right) = 0$$

وبالتالي فالمسألة الجديدة هي:

$$v_t = v_{xx} + x \ \cdots\cdots\cdots(1')$$

مع الشرط الابتدائي: $v\left(x \ , 0\right) = e^{-x}\left[e^x\right] = 1 \cdots\cdots\cdots(2')$

والشروط الحدية: $v\left(0, t\right) = 1 \ , \ v\left(1, t\right) = 0 \ \cdots\cdots\cdots(3')$

وهذه المسألة الجديدة فيها: $a = 1 \ , \ \ell = 1 \ , \ \overline{f}\left(x \ , t\right) = x \ , \ \overline{\varphi}\left(x\right) = 1 \ , \ \overline{\mu_1}\left(t\right) = 1 \ , \ \overline{\mu_2}\left(t\right) = 0$

وهي مسألة حدية غير متجانسة بالشروط الحدية غير الصفرية وحلها يعطى بالشكل:

$$v\left(x \ , t\right) = V\left(x \ , t\right) + w\left(x \ , t\right) \ \cdots\cdots\cdots(4')$$

حيث أنَّ:

$$V\left(x \ , t\right) = \overline{\mu_1}\left(t\right) + \frac{x}{\ell}\left[\overline{\mu_2}\left(t\right) - \overline{\mu_1}\left(t\right)\right] = 1 + \frac{x}{1}\left[0 - 1\right] = 1 - x$$

$$V\left(x \ , 0\right) = 1 - x \ , V_t = 0 \ , V_{xx} = 0$$

أما $w\left(x \ , t\right)$ فهي حل المسألة الحدية التالية:

$$w_t = a^2 w_{xx} + \overline{\overline{f}}\left(x \ , t\right)$$

بالشرط الابتدائي: $w\left(x \ , 0\right) = \overline{\overline{\varphi}}\left(x\right)$

وبالشروط الحدية الصفرية: $w(0,t)=0\ ,\ w(\ell,t)=0$

علماً أنَّ:

$$\overline{\overline{f}}(x,t)=\overline{f}(x,t)-\left[V_t-a^2V_{xx}\right]=x-[0-0]=x$$

$$\overline{\overline{\varphi}}(x)=\overline{\varphi}(x)-V(x,0)=1-(1-x)=x$$

أي أن المسألة الجديدة هي:

$$w_t=w_{xx}+x\quad\cdots\cdots\cdots(1'')$$

بالشرط الابتدائي: $w(x,0)=x\quad\cdots\cdots\cdots(2'')$

وبالشروط الحدية الصفرية: $w(0,t)=0\ ,\ w(1,t)=0\quad\cdots\cdots\cdots(3'')$

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2t}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}w_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\quad\cdots\cdots\cdots(4'')$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\overline{\varphi}}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi\quad,\quad w_n(t)=\int_0^te^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2(t-\tau)}\overline{\overline{f_n}}(\tau)d\tau$$

$$\overline{\overline{f_n}}(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\overline{f}}(\xi,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

وبالتالي فإنَّ:

$$C_n=\frac{2}{1}\int_0^1\xi\sin\left(\frac{n\pi}{1}\xi\right)d\xi=2\int_0^1\xi\sin(n\pi\xi)d\xi=2\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\right]=\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

وكما أنَّ:

$$\overline{\overline{f_n}}(t)=\frac{2}{1}\int_0^1\xi\sin\left(\frac{n\pi}{1}\xi\right)d\xi=2\int_0^1\xi\sin(n\pi\xi)d\xi=2\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\right]=\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

وكما أنَّ:

$$w_n(t)=\int_0^te^{-n^2\pi^2(t-\tau)}\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}d\tau=\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}e^{-n^2\pi^2t}\int_0^te^{n^2\pi^2\tau}d\tau=$$

$$=\frac{2(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}e^{-n^2\pi^2t}\left[e^{n^2\pi^2\tau}\right]_{\tau=0}^{\tau=t}=\frac{2(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}e^{-n^2\pi^2t}\left[e^{n^2\pi^2t}-1\right]=\frac{2(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}\left[1-e^{-n^2\pi^2t}\right]$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في الحل $(4'')$ نجد أنَّ:

$$w(x,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}e^{-n^2\pi^2t}\sin(n\pi x)+\frac{2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\left[1-e^{-n^2\pi^2t}\right]\sin(n\pi x)\quad\cdots\cdots(5'')$$

وبتعويض العلاقة $(5'')$ في العلاقة $(4')$ نجد أن الحل العام للمسألة الحدية المعطاة هو:

$$v(x,t)=1-x+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}e^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x)+\frac{2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\left[1-e^{-n^2\pi^2 t}\right]\sin(n\pi x)\cdots(5')$$

وبالتعويض في العلاقة (4) نجد أن الحل المطلوب للمسألة المعطاة هو:

$$u(x,t)=e^{x-t}\left[1-x+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}e^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x)+\frac{2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\left[1-e^{-n^2\pi^2 t}\right]\sin(n\pi x)\right]$$

❶❻**(الفصل الثاني للعام 2010 – 2011)**: أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$u_t=u_{xx}+u+xe^t\ ,(0<x<1,\ t>0)\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

والموافق للشرط الابتدائي الآتي: $u(x,0)=-x\ \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية: $u(0,t)=e^t\ ,\ u(1,t)=te^t\ ,t\geq 0\ \cdots\cdots\cdots(3)$

الحل: إن المعادلة المعطاة من النمط المكافئ وذات أمثال ثابتة وفيها:

$$a=1,\ b=0\ ,\ c=1\ ,\ f(x,t)=x\,e^t\ ,\varphi(x)=-x\ ,\ \mu_1(t)=e^t\ ,\ \mu_2(t)=te^t$$

ولحلها نجري التحويل التالي:

$$u(x,t)=e^{\left[c-\frac{b^2}{4a^2}\right]t-\frac{b}{2a^2}x}v(x,t)\ \Rightarrow\ u(x,t)=e^{\left[1-\frac{(0)^2}{4(1)^2}\right]t-\frac{(0)}{2(1)^2}x}v(x,t)\ \Rightarrow$$

$$u(x,t)=e^t v(x,t)\ \cdots\cdots\cdots(4)$$

وبالاشتقاق مرة بالنسبة t ومرتين بالنسبة لـ x ، ثم التعويض في (1) و (2) و (3) على الترتيب نجد أنَّ:

نعوض في (3) لنجد أنَّ:

$$e^t=u(0,t)=e^t v(0,t)\Rightarrow\ v(0,t)=1$$

$$te^t=u(1,t)=e^t v(1,t)\Rightarrow v(1,t)=t$$

وبالتالي فالمسألة الجديدة هي:

$$v_t=v_{xx}+x\ \cdots\cdots\cdots(1')$$

مع الشرط الابتدائي: $v(x,0)=-x\ \cdots\cdots\cdots(2')$

والشروط الحدية: $v(0,t)=1\ ,\ v(1,t)=t\ \cdots\cdots\cdots(3')$

وهذه المسألة الجديدة فيها:

$$a=1,\ \ell=1,\ \overline{f}(x,t)=x\ ,\ \overline{\varphi}(x)=-x\ ,\ \overline{\mu_1}(t)=1\ ,\ \overline{\mu_2}(t)=t$$

وهي مسألة حدية غير متجانسة بالشروط الحدية غير الصفرية وحلها يعطى بالشكل:

$$v(x,t)=V(x,t)+w(x,t)\quad\cdots\cdots\cdots(4')$$

حيث أنَّ:

$$V(x,t)=\overline{\mu_1}(t)+\frac{x}{\ell}\left[\overline{\mu_2}(t)-\overline{\mu_1}(t)\right]=1+\frac{x}{1}[t-1]=1+x(t-1)$$

$$V(x,0)=1-x\quad,V_t=x\quad,V_{xx}=0$$

أما $w(x,t)$ فهي حل المسألة الحدية التالية:

$$w_t=a^2w_{xx}+\overline{\overline{f}}(x,t)$$

بالشرط الابتدائي: $w(x,0)=\overline{\overline{\varphi}}(x)$

وبالشروط الحدية الصفرية: $w(0,t)=0\ ,\ w(\ell,t)=0$

علماً أنَّ:

$$\overline{\overline{f}}(x,t)=\overline{f}(x,t)-\left[V_t-a^2V_{xx}\right]=x-[x-0]=0$$

$$\overline{\overline{\varphi}}(x)=\overline{\varphi}(x)-V(x,0)=-x-(1-x)=-1$$

أي أن المسألة الجديدة هي:

$$w_t=w_{xx}\quad\cdots\cdots\cdots(1'')$$

بالشرط الابتدائي: $w(x,0)=-1\quad\cdots\cdots\cdots(2'')$

وبالشروط الحدية الصفرية: $w(0,t)=0\ ,\ w(1,t)=0\quad\cdots\cdots\cdots(3'')$

وهي مسألة حدية متجانسة بالشروط الحدية الصفرية، وفيها:

$$a=1,\ell=1,\overline{\overline{\varphi}}(x)=-1$$

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\quad\cdots\cdots\cdots(4'')$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\overline{\varphi}}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

ومنه فإنَّ:

$$C_n=\frac{2}{1}\int_0^1(-1)\sin\left(\frac{n\pi}{1}\xi\right)d\xi=2\int_0^1(-1)\sin(n\pi\xi)d\xi=2\left[\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi\xi)\right]_{\xi=0}^{\xi=1}=\frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n-1\right]$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في الحل $(4'')$ نجد أنَّ:

$$w(x,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[(-1)^n-1\right]}{n}e^{-n^2\pi^2t}\sin(n\pi x)\quad\cdots\cdots(5'')$$

وبتعويض العلاقة $(5'')$ في العلاقة $(4')$ نجد أن الحل العام للمسألة الحدية المعطاة هو:

$$\boxed{v(x,t)=1+x(t-1)+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[(-1)^n-1\right]}{n}e^{-n^2\pi^2t}\sin(n\pi x)}\cdots(5')$$

وبالتعويض في العلاقة (4) نجد أن الحل المطلوب للمسألة المعطاة هو:

$$u(x,t)=e^t\left[1+x(t-1)+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[(-1)^n-1\right]}{n}e^{-n^2\pi^2t}\sin(n\pi x)\right]$$

❶❼**(الفصل الثاني للعام 2007 – 2008):** أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$u_t=u_{xx}-2u_x+(1+t)e^x\ ,0<x<\pi\ ,\ t>0\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

والموافق للشرط الابتدائي الآتي: $u(x,0)=e^x\sin x\ \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية: $u(0,t)=t\ ,\ u(\pi,t)=e^{\pi}t\ \cdots\cdots\cdots(3)$

الحل: إن المعادلة المعطاة من النمط المكافئ وذات أمثال ثابتة وفيها:

$$a=1\ ,\ b=-2\ ,\ c=0\ ,\ f(x,t)=(1+t)e^x\ ,\ \mu_1(t)=t\ ,\ \mu_2(t)=e^{\pi}t$$

ولحلها نجري التحويل التالي:

$$u(x,t)=e^{\left[c-\frac{b^2}{4a^2}\right]t-\frac{b}{2a^2}x}v(x,t)\ \Rightarrow\ u(x,t)=e^{\left[0-\frac{(-2)^2}{4(1)^2}\right]t-\frac{(-2)}{2(1)^2}x}v(x,t)\ \Rightarrow$$

$$u(x,t)=e^{x-t}v(x,t)\ \cdots\cdots\cdots(4)$$

وبالاشتقاق مرة بالنسبة t ومرتين بالنسبة لـ x ، ثم التعويض في (1) و (2) و (3) على الترتيب نجد أنَّ:

نعوض في (3) لنجد أنَّ:

$$t=u(0,t)=e^{-t}v(0,t)\ \Rightarrow\ v(0,t)=te^t$$

$$e^{\pi}t=u(\pi,t)=e^{\pi-t}v(\pi,t)\ \Rightarrow\ v(\pi,t)=te^t$$

وبالتالي فالمسألة الجديدة هي:

$$v_t=v_{xx}+(1+t)e^t\ \cdots\cdots\cdots(1')$$

مع الشرط الابتدائي: $v(x,0)=e^{-x}\left[e^x\sin x\right]=\sin x\ \cdots\cdots\cdots(2')$

والشروط الحدية: $v(0,t)=te^t\ ,\ v(\pi,t)=te^t\ \cdots\cdots\cdots(3')$

وهذه المسألة الجديدة فيها:

$$a=1\ ,\ \ell=\pi\ ,\ \overline{f}(x,t)=(1+t)e^t\ ,\ \overline{\varphi}(x)=\sin x\ ,\ ,\ \overline{\mu_1}(t)=te^t\ ,\ \overline{\mu_2}(t)=te^t$$

وهي مسألة حدية غير متجانسة بالشروط الحدية غير الصفرية وحلها يعطى بالشكل:

$$v(x,t)=V(x,t)+w(x,t) \quad \cdots\cdots\cdots(4')$$

حيث أنَّ:

$$V(x,t)=\overline{\mu_1}(t)+\frac{x}{\ell}\left[\overline{\mu_2}(t)-\overline{\mu_1}(t)\right]=te^t+\frac{x}{\pi}\left[te^t-te^t\right]=te^t$$

$$V(x,0)=0 \;,\; V_t=(1+t)e^t \;,\; V_{xx}=0$$

أما $w(x,t)$ فهي حل المسألة الحدية التالية:

$$w_t=a^2w_{xx}+\overline{\overline{f}}(x,t)$$

بالشرط الابتدائي: $w(x,0)=\overline{\overline{\varphi}}(x)$

وبالشروط الحدية الصفرية: $w(0,t)=0 \;,\; w(\ell,t)=0$

علماً أنَّ:

$$\overline{\overline{f}}(x,t)=\overline{f}(x,t)-\left[V_t-a^2V_{xx}\right]=(1+t)e^t-\left[(1+t)e^t-0\right]=0$$

$$\overline{\varphi}(x)=\varphi(x)-V(x,0)=\sin x-0=\sin x$$

أي أن المسألة الجديدة هي:

$$w_t=w_{xx} \quad \cdots\cdots\cdots(1'')$$

بالشرط الابتدائي: $w(x,0)=\sin x \quad \cdots\cdots\cdots(2'')$

وبالشروط الحدية الصفرية: $w(0,t)=0 \;,\; w(\pi,t)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(3'')$

وهي مسألة حدية متجانسة بالشروط الحدية الصفرية، وفيها:

$$a=1,\ell=\pi \;,\; \overline{\overline{\varphi}}(x)=\sin x$$

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \quad \cdots\cdots\cdots(4'')$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\varphi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

وبالتالي فإنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\xi\right)d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(\xi)\sin(n\xi)d\xi=\frac{2}{\pi}\begin{cases}\frac{\pi}{2} \;, n=1\\ 0 \;\;, n\neq 1\end{cases} \Rightarrow$$

$$C_n=\begin{cases}1 \;, n=1\\ 0 \;\;, n\neq 1\end{cases}$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في الحل $(4')$ نجد أنَّ:

$$\boxed{w(x,t)=e^{-t}\sin x} \quad \cdots\cdots\cdots(5'')$$

وبتعويض العلاقة $(5'')$ في العلاقة $(4')$ نجد أن الحل العام للمسألة الحدية المعطاة هو:

$$\boxed{v(x,t)=te^{t}+e^{-t}\sin x} \quad \cdots\cdots\cdots(5')$$

وبالتعويض في العلاقة (4) نجد أن الحل المطلوب للمسألة المعطاة هو:

$$\boxed{u(x,t)=e^{x-t}\left(te^{t}+e^{-t}\sin x\right)}$$

❶❽ **(الفصل الثاني للعام 2009 – 2010)**: أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$u_t=u_{xx}-2u_x+e^{x-t} \;,\; 0<x<1 \,,\; t>0 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

والموافق للشرط الابتدائي الآتي: $u(x,0)=e^{x}\sin \pi x \quad \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية: $u(0,t)=te^{-t} \;,\; u(1,t)=te^{1-t} \quad \cdots\cdots\cdots(3)$

الحـل:

إنَّ المعادلة المعطاة من النمط المكافئ وذات أمثال ثابتة وفيها:

$$a=1 \,,\; b=-2 \;,\; c=0 \;,\; f(x,t)=e^{x-t} \;,\; \mu_1(t)=te^{-t} \;,\; \mu_2(t)=te^{1-t}$$

ولحلها نجري التحويل التالي:

$$u(x,t)=e^{\left[c-\frac{b^2}{4a^2}\right]t-\frac{b}{2a^2}x}v(x,t) \Rightarrow u(x,t)=e^{\left[0-\frac{(-2)^2}{4(1)^2}\right]t-\frac{(-2)}{2(1)^2}x}v(x,t) \Rightarrow$$

$$u(x,t)=e^{x-t}v(x,t) \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

وبالاشتقاق مرة بالنسبة t ومرتين بالنسبة لـ x ، ثم التعويض في (1) و (2) و (3) على الترتيب نجد أنَّ:

نعوض في (3) لنجد أنَّ:

$$te^{-t}=u(0,t)=e^{-t}v(0,t) \Rightarrow v(0,t)=t$$

$$te^{1-t}=u(1,t)=e^{1-t}v(1,t) \Rightarrow v(1,t)=t$$

وبالتالي فالمسألة الجديدة هي:

$$v_t=v_{xx}+1 \cdots\cdots\cdots(1')$$

مع الشرط الابتدائي: $v(x,0)=e^{-x}\left[e^{x}\sin \pi x\right]=\sin \pi x \cdots\cdots\cdots(2')$

والشروط الحدية: $v(0,t)=t \;,\; v(1,t)=t \quad \cdots\cdots\cdots(3')$

وهذه المسألة الجديدة فيها:

$$a=1\,,\,\ell=1\,,\,\overline{f}\,(x\,,t\,)=1\,,\,\overline{\varphi}(x\,)=\sin\pi x\quad,\quad\overline{\mu_1}(t\,)=t\quad,\quad\overline{\mu_2}(t\,)=t$$

، وهي مسألة حدية غير متجانسة بالشروط الحدية غير الصفرية وحلها يعطى بالشكل:

$$v\,(x\,,t\,)=V\,(x\,,t\,)+w\,(x\,,t\,)\quad\cdots\cdots\cdots(4')$$

حيث أنَّ:

$$V\,(x\,,t\,)=\overline{\mu_1}(t\,)+\frac{x}{\ell}\left[\overline{\mu_2}(t\,)-\overline{\mu_1}(t\,)\right]=t+\frac{x}{1}[t-t\,]=t$$

$$V\,(x\,,0)=0\,,\,V_t=1\,,\,V_{xx}=0$$

أما $w\,(x\,,t\,)$ فهي حل المسألة الحدية التالية:

$$w_t=a^2w_{xx}+\overline{\overline{f}}\,(x\,,t\,)$$

بالشرط الابتدائي: $w\,(x\,,0)=\overline{\overline{\varphi}}(x\,)$

وبالشروط الحدية الصفرية: $w\,(x\,,0)=0\;,\;w\,(\ell,t\,)=0$

علماً أنَّ:

$$\overline{\overline{f}}\,(x\,,t\,)=\overline{f}\,(x\,,t\,)-\left[V_t-a^2V_{xx}\right]=1-[1-0]=0$$

$$\overline{\overline{\varphi}}(x\,)=\overline{\varphi}(x\,)-V\,(x\,,0)=\sin\pi x-0=\sin\pi x$$

أي أن المسألة الجديدة هي:

$$w_t=w_{xx}\quad\cdots\cdots\cdots(1'')$$

بالشرط الابتدائي: $w\,(x\,,0)=\sin\pi x\quad\cdots\cdots\cdots(2'')$

وبالشروط الحدية الصفرية: $w\,(x\,,0)=0\;,\;w\,(1,t\,)=0\quad\cdots\cdots\cdots(3'')$

وهي مسألة حدية متجانسة بالشروط الحدية الصفرية، وفيها:

$$a=1\,,\,\ell=1\,,\,\overline{\overline{\varphi}}\,(x\,)=\sin\pi x$$

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$w\,(x\,,t\,)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\,e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2t}\,\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\quad\cdots\cdots\cdots(4'')$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\overline{\varphi}}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\,\xi$$

ومنه فإنَّ:

$$C_n=\frac{2}{1}\int_0^1 \sin(\pi\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{1}\xi\right)d\xi=2\int_0^1 \sin(\pi\xi)\sin(n\pi\xi)d\xi=2\begin{cases}\frac{1}{2}, & n=1\\ 0, & n\neq 1\end{cases}\Rightarrow$$

$$C_n=\begin{cases}1, & n=1\\ 0, & n\neq 1\end{cases}$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في الحل $(4')$ نجد أنَّ:

$$\boxed{w(x,t)=e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)}\quad\cdots\cdots\cdots(5'')$$

وبتعويض العلاقة $(5'')$ في العلاقة $(4')$ نجد أن الحل العام للمسألة الحدية المعطاة هو:

$$\boxed{v(x,t)=t+e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)}\quad\cdots\cdots\cdots(5')$$

وبالتعويض في العلاقة (4) نجد أن الحل المطلوب للمسألة المعطاة هو:

$$\boxed{u(x,t)=e^{x-t}\left[t+e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)\right]}$$

❾❶(الدورة التكميلية للعام 2007 – 2008): أوجد حل المعادلة:

$$u_t-u_{xx}-u=e^t$$

والمحقق للشرط الابتدائي:

$$u(x,0)=\cos x$$

الحـل: إن المعادلة المعطاة تكتب بالشكل:

$$u_t=u_{xx}+u+e^t\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

بالشرط الابتدائي:

$$u(x,0)=\cos x\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

وهذه المعادلة من النمط المكافئ وذات أمثال ثابتة وفيها:

$$a=1\ ,\ b=0\ ,\ c=1\ ,\ f(x,t)=e^t$$

ولحلها نجري التحويل التالي:

$$u(x,t)=e^{\left[c-\frac{b^2}{4a^2}\right]t-\frac{b}{2a^2}x}v(x,t)\ \Rightarrow\ u(x,t)=e^{\left[1-\frac{(9)^2}{4(1)^2}\right]t-\frac{(0)}{2(1)^2}x}v(x,t)\ \Rightarrow$$

$$u(x,t)=e^t v(x,t)\quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

باشتقاق العلاقة (3) مرة بالنسبة لـ t ومرتين بالنسبة لـ x ثم التعويض في (1), (2) نجد أنَّ:

$$v_t=v_{xx}+e^t\left(e^{-t}\right)\ \Rightarrow\ v_t=v_{xx}+1$$

$$v(x,0)=\cos x$$

وبالتالي فالمسألة الجديدة هي:

$$v_t = v_{xx} + 1 \cdots\cdots\cdots (1')$$
$$v(x,0) = \cos x \cdots\cdots\cdots (2')$$

وهذه المسألة الجديدة فيها: $a = 1\ ,\ \bar{f}(x,t) = 1\ ,\ \bar{\varphi}(x) = \cos x$ ، وهي معادلة انتشار الحرارة على مستقيم لانهائي الطول وغير المتجانسة ، وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\xi,\tau) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{d\xi}{2a\sqrt{(t-\tau)}} d\tau =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} I_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} I_2 \quad \cdots\cdots\cdots (3')$$

ولنوجد كل من $I_1\ ,\ I_2$:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\xi\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} \frac{d\xi}{2\sqrt{t}}$$

ولحل هذا التكامل نجري التحويل التالي:

$$\frac{\xi - x}{2\sqrt{t}} = z \ \Rightarrow\ \frac{d\xi}{2\sqrt{t}} = dz \quad ,\ \xi = x + 2\sqrt{t}\,z \quad ,\ \begin{cases} \xi = -\infty \ \Rightarrow\ z = -\infty \\ \xi = +\infty \ \Rightarrow\ z = +\infty \end{cases}$$

ومنه نجد أنَّ:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(x + 2\sqrt{t}\,z\right) e^{-z^2} dz = \cos x \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(2\sqrt{t}\,z\right) e^{-z^2} dz - \sin x \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(2\sqrt{t}\,z\right) e^{-z^2} dz}_{=0} =$$
$$= \cos x \left[\sqrt{\pi} e^{-\frac{\left(2\sqrt{t}\right)^2}{4}} \right] = \sqrt{\pi}\, e^{-t} \cos x$$

حيث أن التكامل الثاني هو تكامل لدالة فردية على مجال متناظر فقيمته تساوي الصفر.

إيجاد I_2:

$$I_2 = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{d\xi}{2a\sqrt{(t-\tau)}} d\tau = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} (1) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}} \frac{d\xi}{2\sqrt{(t-\tau)}} d\tau =$$
$$= \int_0^t \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}} \frac{d\xi}{2\sqrt{(t-\tau)}} \right] d\tau = \int_0^t \left[\sqrt{\pi} \right] d\tau = \sqrt{\pi} \int_0^t d\tau = \sqrt{\pi}\, t$$

وبتعويض كل من $I_1\ ,\ I_2$ في العلاقة $(3')$ نجد أنَّ:

$$v(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\pi}e^{-t}\cos x\right)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\pi}t\right)=e^{-t}\cos x+t$$

وبالتعويض في العلاقة (3) نجد أن الحل المطلوب للمسألة المعطاة هو:

$$u(x,t)=e^{t}\left[e^{-t}\cos x+t\right]\Rightarrow \boxed{u(x,t)=\cos x+te^{t}}$$

تمارين غير محلولة:

❶ **(الفصل الأول للعام 2006 – 2007)**: أوجد حل المعادلة:

$$u_t=u_{xx}+3t^2+e^t \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشرط الابتدائي:

$$u(x,0)=x \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

❷ **(الفصل الثاني للعام 2002 – 2003)**: أوجد حل المعادلة:

$$u_t-u_{xx}-u_x-u=0 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشرط الابتدائي:

$$u(x,0)=x^2 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

(الفصل الثاني للعام 2014 – 2015):

إذا كانت الدالة $u(x,t)$ متصلة ومحدودة في المنطقة $0 \le x \le \ell , 0 \le t \le T$ ، تحقق معادلة التوصيل الحراري:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad , \ (0 < x < \ell , t > 0) \ \cdots\cdots\cdots(1)$$

والشرط الابتدائي: $u(x,0) = \varphi(x) \ \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية: $u(0,t) = \mu_1(t) \ , \ u(\ell,t) = \mu_2(t) \ \cdots\cdots\cdots(3)$

فأثبت أن للمعادلة حل وحيد من أجل $0 \le x \le \ell \ , \ t \ge 0$.

الاثبات:

لنشكل الدالة:

$$v(x,t) = u_2(x,t) - u_1(x,t) \ \cdots\cdots\cdots(4)$$

وبما أن الدالتين $u_1(x,t)$ ، $u_2(x,t)$ متصلتان في المنطقة: $0 \le x \le \ell , 0 \le t \le T$ فإنَّ الدالة $v(x,t)$ التي تساوي الفرق بينهما تكون دالة متصلة في المنطقة ذاتها.

وبما أنَّ الدالة $v(x,t)$ هي عبارة عن الفرق بين حلين لمعادلة التوصيل الحراري في المنطقة $0 \le x \le \ell \ , \ t \ge 0$ ، بالتالي فهي حل لمعادلة التوصيل الحراري المتجانسة الموافقة للمعادلة (1) في هذه المنطقة أي:

$$\left.\begin{aligned} (u_1)_t &= a^2 (u_1)_{xx} + f(x,t) \\ (u_2)_t &= a^2 (u_2)_{xx} + f(x,t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left[(u_2)_t - (u_1)_t\right] = a^2 \left[(u_2)_{xx} - (u_1)_{xx}\right] \Rightarrow v_t = a^2 v_{xx}$$

وبالتالي فإن مبدأ القيمة العظمى قابل للتطبيق على هذه الدالة، أي أنها تصل إلى قيمتها العظمى أو الصغرى إما عند $t = 0$ أو عند $x = 0$ أو عند $x = \ell$.

وبالاستفادة من الشروط (2) و (3) مع الاستفادة من (4) نجد أنَّ:

$$v(x,0) = u_2(x,0) - u_1(x,0) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$$

$$v(0,t) = u_2(0,t) - u_1(0,t) = \mu_1(t) - \mu_1(t) = 0$$

$$v(\ell,t) = u_2(\ell,t) - u_1(\ell,t) = \mu_2(t) - \mu_2(t) = 0$$

وهذا يعني أن $v(x,t) = 0$ وبالتالي فإنَّ:

$$u_2(x,t) - u_1(x,t) = 0 \ \Rightarrow \ u_2(x,t) = u_1(x,t)$$

أي أن للمعادلة المعطاة حل وحيد.

(الفصل الأول للعام 2005 – 2006): بفرض أن $u_1(x,t), u_2(x,t)$ حلين لمعادلة التوصيل الحراري، وبفرض أن هذين الحلين يحققان الشروط التالية:

$$u_1(x,0) \le u_2(x,0),\ u_1(0,t) \le u_2(0,t),\ u_1(\ell,t) \le u_2(\ell,t)$$

أثبت أنَّ: $u_1(x,t) \le u_2(x,t)$ لجميع قيم $0 \le t \le T$ و $0 \le x \le \ell$.

الحـل:

لنشكل الفرق: $v(x,t) = u_2(x,t) - u_1(x,t)$ عندئذٍ الدالة $v(x,t)$ تحقق معادلة التوصيل الحراري المتجانسة لأنَّ:

$$\left.\begin{aligned}(u_1)_t &= a^2 (u_1)_{xx} + f(x,t) \\ (u_2)_t &= a^2 (u_2)_{xx} + f(x,t)\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left[(u_2)_t - (u_1)_t\right] = a^2\left[(u_2)_{xx} - (u_1)_{xx}\right] \Rightarrow v_t = a^2 v_{xx}$$

وبالتالي فإن مبدأ القيمة العظمى قابل للتطبيق على هذه الدالة، أي أنها تصل إلى قيمتها العظمى أو الصغرى إما عند $t = 0$ أو عند $x = 0$ أو عند $x = \ell$، ومن جهة أخرى لدينا:

$$\begin{aligned}
u_1(x,0) \le u_2(x,0) &\Rightarrow u_2(x,0) - u_1(x,0) \ge 0 \Rightarrow v(x,0) \ge 0 \\
u_1(0,t) \le u_2(0,t) &\Rightarrow u_2(0,t) - u_1(0,t) \ge 0 \Rightarrow v(0,t) \ge 0 \\
u_1(\ell,t) \le u_2(\ell,t) &\Rightarrow u_2(\ell,t) - u_1(\ell,t) \ge 0 \Rightarrow v(\ell,t) \ge 0
\end{aligned}$$

نستنتج من ذلك أن الدالة $v(x,t) \ge 0$ في المنطقة $0 < x < \ell,\ 0 < t \le T$، وإلا فإن الدالة $v(x,t)$ كان سيصبح لها قيمة صغرى سالبة في المنطقة $0 < x < \ell,\ 0 < t \le T$، ومن ثم فإنَّ:

$$\left[u_2(x,t) - u_1(x,t)\right] \ge 0$$

ومنه فإنَّ: $u_1(x,t) \le u_2(x,t)$ وهو المطلوب.

المعادلات من النمط الناقصي

حل معادلة لابلاس في الإحداثيات الأسطوانية ، ولدينا الحالات التالية:

① **داخل دائرة** نصف قطرها a بالشرط الحدي $u|_{\rho=a}=f(\varphi)$ يعطى بالدستور التالي:

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{n}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)\ ;\ \rho\le a$$

حيث أن الثوابت B_n , A_n يتم استنتاجها من منشور فورييه للدالة $f(\varphi)$.

② **خارج دائرة** نصف قطرها a بالشرط الحدي $u|_{\rho=a}=f(\varphi)$ يعطى بالدستور التالي:

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\rho^{n}}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)\ ;\ \rho\ge a$$

حيث أن الثوابت B_n , A_n يتم استنتاجها من منشور فورييه للدالة $f(\varphi)$.

③ **في المنطقة** $R_1<\rho<R_2$ **بالشرطين الحديين :** $u|_{\rho=R_1}=f_1(\varphi)\ ,\ u|_{\rho=R_2}=f_2(\varphi)$ يعطى بالدستور التالي:

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\rho^{n}+\frac{C_n}{\rho^{n}}\right)\cos n\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n\rho^{n}+\frac{D_n}{\rho^{n}}\right)\sin n\varphi+a\ln\rho+b$$

حل معادلة لابلاس في الإحداثيات الكروية في حالة $u=u(r,\theta)$ ، **ولدينا الحالات التالية:**

① **داخل كرة** نصف قطرها R بالشرط الحدي $u|_{r=R}=f(\theta)$ يعطى بالدستور التالي:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^{n}P_n(\cos\theta)\ ;\ r\le R$$

حيث أن الثوابت B_n , A_n يتم استنتاجها من منشور فورييه للدالة $f(\varphi)$.

② **خارج كرة** نصف قطرها a بالشرط الحدي $u|_{r=R}=f(\theta)$ يعطى بالدستور التالي:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\, r^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)\ ,\ r\ge R$$

حيث أن الثوابت B_n , A_n يتم استنتاجها من منشور فورييه للدالة $f(\varphi)$.

③ **في المنطقة** $R_1<\rho<R_2$ **بالشرطين الحديين :** $u|_{r=R_1}=f_1(\theta)\ ,\ u|_{r=R_2}=f_2(\theta)$ يعطى بالدستور التالي:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^{n}+B_n r^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta)$$

حيث أنه في كل الحالات:

$$P_0(\cos\theta)=1\ ,\ P_1(\cos\theta)=\cos\theta\ ,P_2(\cos\theta)=\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta-1\right)$$

$$P_3(\cos\theta)=\frac{1}{2}\left(5\cos^3\theta-3\cos\theta\right)\ ,\ P_4(\cos\theta)=\frac{1}{8}\left(35\cos^4\theta-30\cos^2\theta+3\right)$$

حل معادلة لابلاس في الحالة العامة $u = u(r, \varphi, \theta)$ **ولدينا الحالات التالية:**

① **داخل كرة** نصف قطرها R بالشرط الحدي $u|_{r=R} = f(\theta, \varphi)$ يعطى بالدستور التالي:

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n(\theta, \varphi) \quad ; \quad r \le R$$

② **خارج كرة** نصف قطرها a بالشرط الحدي $u|_{r=R} = f(\theta, \varphi)$ يعطى بالدستور التالي:

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{(n+1)} Y_n(\theta, \varphi) \quad , \quad r \ge R$$

علماً أنّ:

$$Y_0 = a_0$$
$$Y_1 = a_1 \cos\theta + (b_1 \cos\varphi + c_1 \sin\varphi)\sin\theta$$
$$Y_2 = a_2\left(3\cos^2\theta - 1\right) + (b_2 \cos\varphi + c_2 \sin\varphi)\sin\theta\cos\theta + (d_2 \cos 2\varphi + e_2 \sin 2\varphi)\sin^2\theta$$

القسم الأول(تمارين على الحالة الأسطوانية):

❶**(الدورة الثالثة للعام 2013 – 2014):** أوجد حل معادلة لابلاس **داخل** دائرة نصف قطرها $a = 1$ في الاحداثيات الأسطوانية $u(\rho, \varphi)$ والموافق للشرط الحدي :

$$u|_{\rho=1} = \sin^3\varphi$$

الحــل: إنَّ حل المسألة المعطاة يعطى بالدستور التالي:

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \;\; ; \;\; \rho \le a \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

نعلم أنَّ:

$$\sin(3\varphi) = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$$

وبالتالي فإنَّ:

$$\sin^3\varphi = \frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi$$

وبالتالي فإن الشرط الحدي المعطى يكتب بالشكل: $u|_{\rho=1} = \frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi \quad \cdots\cdots\cdots(2)$

وبتطبيق الشرط الحدي (2) على الحل (1) نجد أنَّ:

$$\frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin(3\varphi) = u|_{\rho=1} = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) =$$
$$= A_0 + A_1 \cos\varphi + B_1 \sin\varphi + A_2 \cos 2\varphi + B_2 \sin 2\varphi + A_3 \cos 3\varphi + B_3 \sin 3\varphi + \cdots$$

وبمطابقة الطرفين نجد أنَّ:

$$B_1=\frac{3}{4}\,,B_3=-\frac{1}{4}$$

وبقية الثوابت معدومة، وبالتعويض في عبارة الحل (1) نجد أنَّ الحل المطلوب هو :

$$\boxed{u\left(\rho,\varphi\right)=\frac{3}{4}\rho\sin\varphi-\frac{1}{4}\rho^3\sin3\varphi}$$

❷**(الدورة الثالثة للعام 2013 – 2014):** أوجد حل معادلة لابلاس $\Delta u=0$ ، في الاحداثيات الاسطوانية $u\left(\rho,\varphi\right)$ **داخل** دائرة نصف قطرها $(a=1)$، والمحقق للشرط الحدي التالي:

$$u\big|_{\rho=1}=\cos^3\varphi$$

الحــل: إنَّ حل المسألة المعطاة يعطى بالدستور التالي:

$$u\left(\rho,\varphi\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)\;\;;\;\;\rho\le a\qquad\cdots\cdots\cdots(1)$$

نعلم أنَّ:

$$\cos3\varphi=-3\cos\varphi+4\cos^3\varphi$$

وبالتالي فإنَّ:

$$\cos^3\varphi=\frac{3}{4}\cos\varphi+\frac{1}{4}\cos\left(3\varphi\right)$$

وبالتالي فإن الشرط الحدي المعطى يكتب بالشكل: $u\big|_{\rho=1}=\frac{3}{4}\cos\varphi+\frac{1}{4}\cos3\varphi\quad\cdots\cdots\cdots(2)$

وبتطبيق الشرط الحدي (2) على الحل (1) نجد أنَّ:

$$\frac{3}{4}\cos\varphi+\frac{1}{4}\cos3\varphi=u\big|_{\rho=1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)=$$

$$=A_0+A_1\cos\varphi+B_1\sin\varphi+A_2\cos2\varphi+B_2\sin2\varphi+A_3\cos3\varphi+B_3\sin3\varphi+\cdots$$

وبمطابقة الطرفين نجد أنَّ:

$$A_1=\frac{3}{4}\,,A_3=\frac{1}{4}$$

وبقية الثوابت معدومة، وبالتعويض في عبارة الحل (1) نجد أنَّ الحل المطلوب هو :

$$\boxed{u\left(\rho,\varphi\right)=\frac{3}{4}\rho\cos\varphi+\frac{1}{4}\rho^3\cos3\varphi}$$

❸**(الفصل الأول للعام 2008 – 2009):** أوجد حل معادلة لابلاس $\Delta u=0$ ، في الاحداثيات الاسطوانية $u\left(\rho,\varphi\right)$ **داخل** دائرة نصف قطرها $(a=1)$، والمحقق للشرط الحدي التالي:

$$u\big|_{\rho=1}=\cos^4\varphi$$

الحــل: إنَّ حل المسألة المعطاة يعطى بالدستور التالي:

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)\ \ ;\ \ \rho\le a \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

نعلم أنَّ:

$$\cos^4\varphi=\left(\cos^2\varphi\right)^2=\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left[1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[1+2\cos 2\varphi+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4\varphi\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}+2\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\cos 4\varphi\right]=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\frac{1}{8}\cos 4\varphi$$

وبالتالي فإن الشرط الحدي المعطى يكتب بالشكل: $u\big|_{\rho=1}=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\frac{1}{8}\cos 4\varphi \quad \cdots\cdots\cdots(2)$

وبتطبيق الشرط الحدي (2) على الحل (1) نجد أنَّ:

$$\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\cos 4\varphi=u\big|_{\rho=1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)=$$

$$=A_0+A_1\cos\varphi+B_1\sin\varphi+A_2\cos 2\varphi+B_2\sin 2\varphi+A_3\cos 3\varphi+B_3\sin 3\varphi+$$

$$+A_4\cos 4\varphi+B_4\sin 4\varphi+\cdots$$

وبمطابقة الطرفين نجد أنَّ:

$$A_0=\frac{3}{8}\ ,A_2=\frac{1}{2}\ ,\ A_4=\frac{1}{8}$$

وبقية الثوابت معدومة، وبالتعويض في عبارة الحل (1) نجد أنَّ الحل المطلوب هو:

$$\boxed{u(\rho,\varphi)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\rho^2\cos 2\varphi+\frac{1}{8}\rho^4\cos 4\varphi}$$

❹**(الدورة الاستثنائية للعام 2009 – 2010):** أوجد حل معادلة لابلاس $\Delta u=0$، في الاحداثيات الاسطوانية $u(\rho,\varphi)$ **خارج** دائرة نصف قطرها $(a=1)$، والمحقق للشرط الحدي التالي:

$$u\big|_{\rho=1}=1+\sin^2\varphi$$

الحل: إنَّ حل المسألة المعطاة يعطى بالدستور التالي:

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\rho^n}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)\ \ ;\ \ \rho\ge a \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

نعلم أنَّ:

$$1+\sin^2\varphi=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi$$

وبالتالي فإن الشرط الحدي المعطى يكتب بالشكل:

$$u\big|_{\rho=1}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

وبتطبيق الشرط الحدي (2) على الحل (1) نجد أنَّ:

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi = u\big|_{\rho=1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\right)=$$
$$= A_0 + A_1\cos\varphi + B_1\sin\varphi + A_2\cos 2\varphi + B_2\sin 2\varphi + \cdots$$

وبمطابقة الطرفين نجد أنَّ:

$$A_0 = \frac{3}{2}\,, B_2 = -\frac{1}{2}$$

وبقية الثوابت معدومة، وبالتعويض في عبارة الحل (1) نجد أنَّ الحل المطلوب هو:

$$\boxed{u(\rho,\varphi) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\rho^2}\cos 2\varphi}$$

❺**(الفصل الثاني للعام 2005 – 2006):** أوجد حل معادلة لابلاس $\Delta u = 0$ في الاحداثيات الأسطوانية $u(\rho,\varphi)$ في المنطقة $1<\rho<2$، والمحقق للشروط الحدية:

$$u\big|_{\rho=1} = 1+\cos^2\varphi \quad , \quad u\big|_{\rho=2} = \sin^2\varphi$$

الـحل: إنَّ حل المسألة المعطاة يعطى بالدستور التالي:

$$u(\rho,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\rho^n + \frac{C_n}{\rho^n}\right)\cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n\rho^n + \frac{D_n}{\rho^n}\right)\sin n\varphi + a\ln\rho + b \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

نعلم أنَّ:

$$1+\cos^2\varphi = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi \;\; , \;\; \sin^2\varphi = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi$$

وبالتالي فإن الشروط الحدية المعطاة تكتب بالشكل:

$$u\big|_{\rho=1} = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi \quad , \quad u\big|_{\rho=2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

وبتطبيق الشروط الحدية (2) على الحل (1) نجد أنَّ:

تطبيق الشرط الأول:

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi = u\big|_{\rho=1} = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n + C_n)\cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty}(B_n + D_n)\sin n\varphi + b \;\; \Rightarrow$$

$$\boxed{b = \frac{3}{2}} \;\cdots\cdots\cdots(1') \quad , \quad A_2 + C_2 = \frac{1}{2} \;\cdots\cdots\cdots(2')$$

تطبيق الشرط الثاني:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi = u\big|_{\rho=2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(2^n A_n + \frac{C_n}{2^n}\right)\cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(2^n B_n + \frac{D_n}{2^n}\right)\sin n\varphi + a\ln 2 + b \Rightarrow$$

$$a\ln 2 + b = \frac{1}{2} \;\cdots\cdots\cdots(1'') \quad , \quad 4A_2 + \frac{1}{4}C_2 = -\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots(2'')$$

بطرح العلاقة $(1')$ من العلاقة $(1'')$ نجد أنَّ:

$$a\ln 2=-1 \ \Rightarrow\ a=-\frac{1}{\ln 2}$$

وبضرب العلاقة $(2')$ بالعدد 4 ونطرح من النتيجة العلاقة $(2'')$ نجد أنَّ:

$$\frac{15}{4}C_2=\frac{5}{2} \ \Rightarrow\ \boxed{C_2=\frac{2}{3}}$$

نعوض في العلاقة $(2')$ فنجد أنَّ:

$$A_2+\frac{2}{3}=\frac{1}{2} \ \Rightarrow A_2=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6} \ \Rightarrow \boxed{A_2=-\frac{1}{6}}$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في عبارة الحل (1) نجد أن الحل المطلوب هو :

$$\boxed{u(\rho,\varphi)=\frac{3}{2}-\frac{\ln\rho}{\ln 2}+\left(\frac{2}{3\rho^2}-\frac{1}{6}\rho^2\right)\cos 2\varphi}$$

معادلة لابلاس في الاحداثيات الاسطوانية:

أوجد حل معادلة لابلاس في الإحداثيات الاسطوانية:

$$\Delta u=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشرط الحدي $\quad u\big|_{\rho=a}=f(\varphi) \quad \cdots\cdots\cdots(2)$

في الحالتين التاليتين: ❶ داخل دائرة نصف قطرها a . ❷ خارج دائرة نصف قطرها يساوي a.

الحل: سوف نبحث عن حل من الشكل:

$$u(\rho,\varphi)=R(\rho).\Phi(\varphi)\neq 0 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

نشتق هذه العلاقة:

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=R'(\rho).\Phi(\varphi) \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=R(\rho).\Phi''(\varphi)$$

نعوض في المعادلة (1) فنجد أنَّ:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho R'(\rho).\Phi(\varphi)\right]+\frac{1}{\rho^2}\left[R(\rho).\Phi''(\varphi)\right]=0 \quad \Rightarrow \left(\times\rho^2\right)$$

$$\rho\Phi(\varphi)\frac{d}{d\rho}\left[\rho R'(\rho)\right]+R(\rho).\Phi''(\varphi)=0$$

وبقسمة طرفي العلاقة الأخيرة على $R(\rho).\Phi(\varphi)\neq 0$ نجد أن :

$$\frac{\rho\frac{d}{d\rho}\left[\rho R'(\rho)\right]}{R(\rho)}+\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{d}{d\rho}\left[\rho R'(\rho)\right]}{\frac{R(\rho)}{\rho}}=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\lambda$$

ومن هذا التناسب نحصل على المعادلتين:

$$\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0 \quad , \quad \Phi(\varphi)\neq 0 \cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left[\rho R'(\rho)\right]-\lambda R(\rho)=0 \ \ , \ R(\rho)\neq 0 \ \cdots\cdots\cdots(5)$$

إن المعادلة (4) هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية وذات أمثال ثابتة وحلها يعطى بالشكل:

$$\Phi(\varphi)=A\cos\left(\sqrt{\lambda}\varphi\right)+B\sin\left(\sqrt{\lambda}\varphi\right)$$

علماً أن A,B ثوابت ، ونشير إلى أنه عند تغير الزاوية φ بمقدار 2π يجب أن تعود الدالة أحادية القيمة $u(\rho,\varphi)$ إلى قيمتها الأصلية أي: $u(\rho,\varphi+2\pi)=u(\rho,\varphi)$ ، ومن هنا سينتج أن $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$ أي أن الدالة $\Phi(\varphi)$ تعتبر دالة دورية في الزاوية φ بفترة دورية 2π، وهذا يكون ممكناً إذا كان $\sqrt{\lambda}=n$ حيث أن n عدد صحيح وبالتالي فإنَّ:

$$\Phi_n(\varphi)=A_n\cos(n\varphi)+B_n\sin(n\varphi)$$

ومن جهة أخرى سنبحث عن حل للمعادلة (5) من الشكل:

$$R(\rho)=\rho^{\mu}$$

حيث أن μ ثابت يطلب تحديده، ومن أجل ذلك نشتق العلاقة الأخيرة بالنسبة لـ ρ :

$$R'(\rho)=\mu\rho^{\mu-1}$$

ثم نعوض في المعادلة (5)، مع تعويض قيمة $\lambda=n^2$ فيها:

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left[\rho\mu\rho^{\mu-1}\right]-n^2\rho^{\mu}=0 \ \Rightarrow \ \rho\frac{d}{d\rho}\left[\mu\rho^{\mu}\right]-n^2\rho^{\mu}=0 \ \Rightarrow$$

$$\rho\left[\mu^2\rho^{\mu-1}\right]-n^2\rho^{\mu}=0 \ \Rightarrow \ \left(\mu^2-n^2\right)\rho^{\mu}=0 \Rightarrow \ \mu^2-n^2=0 \Rightarrow \mu=\mp n$$

وبالتالي نجد أنَّ:

$$R(\rho)=C\rho^{n}+D\rho^{-n}$$

❶ لحل المسألة الداخلية يجب أن نضع $(\mu=n)$ فيكون:

$$R(\rho)=C\rho^{n}$$

وذلك لأنه إذا كان $D\neq 0$ فإنَّ $u(\rho,\varphi)=R(\rho).\Phi(\varphi)$ تؤول إلى ما لانهاية عند $\rho=0$ ولا تعتبر دالة توافقية داخل الدائرة، وبالتالي فإنَّ الحلول الخاصة للمسألة الداخلية هي:

$$u_n(\rho,\varphi)=\rho^n\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)\ ;\ \rho\le a\quad ,C=1$$

علماً أن a نصف قطر الدائرة ، ويكون الحل العام هو مجموع الحلول الخاصة:

(حل المسألة الداخلية):

$$\boxed{u(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)\ ;\ \rho\le a}\quad\cdots\cdots\cdots(*)$$

ولتعيين الثوابت $A_n\ ,B_n$ نستعين بالشروط الحدية المعطاة (2):

$$u(a,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)=f(\varphi)\quad\cdots\cdots\cdots(6)$$

وباعتبار أنَّ $f(\varphi)$ معطاة كدالة في الزاوية φ ، نأخذ مفكوكها في سلسلة فورييه على الصورة التالية:

$$f(\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n\cos(n\varphi)+\beta_n\sin(n\varphi)\right]\quad\cdots\cdots\cdots(7)$$

علماً أنَّ:

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\psi)d\psi$$

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\psi)\cos(n\psi)d\psi\quad ,\quad \beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\psi)\sin(n\psi)d\psi\quad ;n=1,2,...$$

وبمقارنة العلاقتين (6) و (7) نحصل على:

$$A_0=\frac{\alpha_0}{2}\ ,\ A_n=\frac{\alpha_n}{a^n}\ ,\ B_n=\frac{\beta_n}{a^n}$$

وبالتالي فإن حل المسألة الداخلية هو:

$$u(\rho,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\left[\alpha_n\cos(n\varphi)+\beta_n\sin(n\varphi)\right]\cdots\cdots\cdots(8)$$

❷ لحل المسألة الخارجية نختار العكس أي $(\mu=-n)$ فيكون:

$$R(\rho)=D\rho^{-n}$$

لأن حل المسألة الخارجية يجب أن يكون محدوداً في اللانهاية، وبالتالي فإن:

$$u_n(\rho,\varphi)=\rho^{-n}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)\ ;\ \rho\ge a\quad ,\ D=1$$

ومنه فإنَّ حل المسألة الخارجية هو:

$$\boxed{u(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{-n}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)\ ;\ \rho\ge a}\quad\cdots\cdots\cdots(**)$$

ولتعيين الثوابت $A_n\ ,B_n$ نستعين بالشروط الحدية المعطاة (2):

$$u(a,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^n}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)=f(\varphi)\quad\cdots\cdots\cdots(6')$$

وباعتبار أنَّ $f\ (\varphi)$ معطاة كدالة في الزاوية φ ، نأخذ مفكوكها في سلسلة فورييه على الصورة التالية:

$$f\ (\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n\cos(n\varphi)+\beta_n\sin(n\varphi)\right]\quad\cdots\cdots\cdots(7')$$

علماً أنَّ:

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\ (\psi)d\psi$$

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\ (\psi)\cos(n\psi)d\psi\quad,\quad\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\ (\psi)\sin(n\psi)d\psi\quad;n=1,2,...$$

وبمقارنة العلاقتين (6) و (7) نحصل على:

$$A_0=\frac{\alpha_0}{2}\ ,\ A_n=\alpha_n a^n\quad,\ B_n=\beta_n a^n$$

وبالتالي فإن حل المسألة الخارجية هو :

$$u\,(\rho,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{\rho}\right)^n\left[\alpha_n\cos(n\varphi)+\beta_n\sin(n\varphi)\right]\quad\cdots\cdots\cdots(8')$$

ملاحظة: إن حل معادلة لابلاس في الاحداثيات الاسطوانية في المنطقة $R_1<\rho<R_2$ والمحقق للشروط الحدية:

$$u|_{\rho=R_1}=f_1(\varphi)\quad,\quad u|_{\rho=R_2}=f_2(\varphi)$$

يعطى بالدستور التالي:

$$\boxed{u\,(\rho,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\rho^n+\frac{C_n}{\rho^n}\right)\cos n\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n\rho^n+\frac{D_n}{\rho^n}\right)\sin n\varphi+a\ln\rho+b}$$

❻**(الفصل الثاني للعام $2003-2004$)**: أوجد الحل العام لمعادلة لابلاس في الاحداثيات الاسطوانية:

$$\Delta u=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}=0$$

داخل دائرة نصف قطرها a ، ثم استنتج الحل العام لهذه المعادلة **خارج** الدائرة.

الحـل: إن الحل تتضمنه الفقرة السابقة ونتوقف عند العلاقة $(*)$ في ❶ وعند العلاقة $(**)$ في❷.

❼**(الفصل الثاني للعام $2006-2007$)**: أوجد الحل العام لمعادلة لابلاس(في الاحداثيات الاسطوانية):

$$\Delta u=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}=0$$

خارج دائرة نصف قطرها a **(الحل العام للمسألة الحدية الخارجية).**

تطبيق: أوجد الحل الخاص للمسألة السابقة والمحقق للشرط الحدي: $u|_{\rho=1}=1+2\sin\varphi\cos\varphi$.

الحـل: إن القسم النظري من السؤال قد تم حله في الفقرة ☜ ، ونختار منها المسألة الخارجية فقط.

حل التطبيق: إنَّ حل المسألة المعطاة يعطى بالدستور التالي:

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\rho^n}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)\ ;\ \rho\geq a\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

نعلم أنَّ:

$$1+2\sin\varphi\cos\varphi=1+\sin 2\varphi$$

وبالتالي فإن الشرط الحدي المعطى يكتب بالشكل: $u\big|_{\rho=1}=1+\sin 2\varphi\ \cdots\cdots\cdots(2)$

وبتطبيق الشرط الحدي (2) على الحل (1) نجد أنَّ:

$$1+\sin 2\varphi=u\big|_{\rho=1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)=$$

$$=A_0+A_1\cos\varphi+B_1\sin\varphi+A_2\cos 2\varphi+B_2\sin 2\varphi+\cdots$$

وبمطابقة الطرفين نجد أنَّ:

$$A_0=1\,,B_2=1$$

وبقية الثوابت معدومة، وبالتعويض في عبارة الحل (1) نجد أنَّ الحل المطلوب هو:

$$\boxed{u(\rho,\varphi)=1+\frac{1}{\rho^2}\sin 2\varphi}$$

❸**(الفصل الثاني للعام 2008 – 2009):** أوجد الحل العام لمعادلة لابلاس(في الاحداثيات الاسطوانية):

$$\Delta u=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$$

خارج دائرة نصف قطرها a **(الحل العام للمسألة الحدية الخارجية).**

تطبيق: أوجد الحل الخاص للمسألة السابقة والمحقق للشرط الحدي: $u\big|_{\rho=1}=1+8\cos^3\varphi+\cos\varphi$.

الحــل: إن القسم النظري من السؤال قد تم حله في الفقرة ☜ ، ونختار منها المسألة الخارجية فقط.

حل التطبيق: إنَّ حل المسألة المعطاة يعطى بالدستور التالي:

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\rho^n}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)\ ;\ \rho\geq a\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

نعلم أنَّ:

$$\cos 3\varphi=-3\cos\varphi+4\cos^3\varphi$$

وبالتالي فإنَّ:

$$\cos^3\varphi=\frac{3}{4}\cos\varphi+\frac{1}{4}\cos(3\varphi)$$

ومنه فإنَّ:

$$1+\cos\varphi+8\cos^3\varphi=1+\cos\varphi+8\left[\frac{3}{4}\cos\varphi+\frac{1}{4}\cos 3\varphi\right]=1+\cos\varphi+6\cos\varphi+2\cos 3\varphi$$

$$=1+7\cos\varphi+2\cos 3\varphi$$

وبالتالي فإن الشرط الحدي المعطى يكتب بالشكل: $u|_{\rho=1} == 1+7\cos\varphi+2\cos 3\varphi \quad \cdots\cdots\cdots(2)$

وبتطبيق الشرط الحدي (2) على الحل (1) نجد أنَّ:

$$=1+7\cos\varphi+2\cos 3\varphi = u|_{\rho=1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)=$$

$$=A_0+A_1\cos\varphi+B_1\sin\varphi+A_2\cos 2\varphi+B_2\sin 2\varphi+A_2\cos 3\varphi+B_2\sin 3\varphi+\cdots$$

وبمطابقة الطرفين نجد أنَّ:

$$A_0=1\,,A_1=7\,,\,A_3=1$$

وبقية الثوابت معدومة، وبالتعويض في عبارة الحل (1) نجد أنَّ الحل المطلوب هو:

$$\boxed{u(\rho,\varphi)=1+\frac{7}{\rho}\cos\varphi+\frac{2}{\rho^3}\cos 3\varphi}$$

القسم الثاني(تمارين على الحالة الكروية $u(r,\theta)$):

❶**(الفصل الثاني للعام 2007 – 2008):** أوجد الحل العام لمعادلة لابلاس في الاحداثيات الكروية حالة $u(r,\theta)$:

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

داخل كرة نصف قطرها R.

تطبيق: أوجد حل المسألة السابقة، والمحقق للشروط الحدية الآتية:

$$\left(u+u_r\right)\big|_{r=1}=\sin^2\theta$$

داخل كرة نصف قطرها $R=1$.

الحــل: سوف نبحث عن حل من الشكل:

$$u(r,\theta)=Z(r)\,W(\theta)\neq 0 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

علماً أن Z دالة تابعة لـ r فقط ، و W دالة تابعة لـ θ فقط.

نشتق العلاقة (2) ونبدل في المعادلة (1):

$$\frac{\partial u}{\partial r}=Z'(r)\,W(\theta) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial\theta}=Z(r)W'(\theta)$$

نعوض في المعادلة (1):

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2Z'(r)\,W(\theta)\right]+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta Z(r)W'(\theta)\right]=0 \;\Rightarrow$$

$$W(\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2Z'(r)\right]=-\frac{Z(r)}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta W'(\theta)\right]$$

وبقسمة الطرفين على المقدار $Z(r)W(\theta)\neq 0$ نجد أنَّ:

$$\frac{\frac{d}{dr}\left[r^2 Z'(r)\right]}{Z(r)}=-\frac{\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta W'(\theta)\right]}{\sin\theta W(\theta)}=\lambda$$

من هذا التناسب نحصل على المعادلتين:

$$\frac{d}{dr}\left[r^2 Z'(r)\right]-\lambda Z(r)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta W'(\theta)\right]+\lambda\sin\theta W(\theta)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

من (4) نجد أنَّ:

$$\frac{d}{dr}\left[r^2 Z'(r)\right]-\lambda Z(r)=0 \;\Rightarrow\; r^2 Z''(r)+2rZ'(r)-\lambda Z(r)=0$$

ومن أجل $\lambda=\upsilon(\upsilon+1)$ فإن المعادلة الأخيرة تأخذ الشكل:

$$r^2 Z''(r)+2rZ'(r)-\upsilon(\upsilon+1)Z(r)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

سوف نبحث عن حل لهذه المعادلة من الشكل:

$$Z(r)=r^{\alpha}\neq 0$$

نشتق ثم نعوض في المعادلة الأخيرة لنجد أن:

$$r^2\left[\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}\right]+2r\left[\alpha r^{\alpha-1}\right]-\upsilon(\upsilon+1)r^{\alpha}=0 \;\Rightarrow$$

$$\left[\alpha(\alpha-1)+2\alpha-\upsilon(\upsilon+1)\right]r^{\alpha}=0 \;\Rightarrow\; \alpha(\alpha-1)+2\alpha-\upsilon(\upsilon+1)=0 \;,\; r^{\alpha}\neq 0 \;\Rightarrow$$

$$\alpha^2-\alpha+2\alpha-\upsilon(\upsilon+1)=0 \;\Rightarrow\; \alpha^2+\alpha-\upsilon(\upsilon+1)=0 \;\Rightarrow \alpha_1=\upsilon \;,\; \alpha_2=\upsilon+1$$

ومن ثم فإن حل المعادلة (3) يأخذ الشكل التالي:

$$Z(r)=Ar^{\upsilon}+Br^{-(\upsilon+1)} \quad \cdots\cdots\cdots(6)$$

علماً أنَّ A,B ثابتان.

لحل المعادلة (4) نجري التحويل $\xi=\cos\theta$ عندئذٍ تأخذ المعادلة (4) الشكل:

$$\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta W'(\theta)\right]+\upsilon(\upsilon+1)\sin\theta W(\theta)=0$$

$$\xi=\cos\theta \;\Rightarrow\; \theta=\arccos\xi$$

$$d\theta=-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi \;\Rightarrow\; \frac{d}{d\theta}=-\sqrt{1-\xi^2}\,\frac{d}{d\xi}$$

ومنه فإن المعادلة الأخيرة تكتب بالشكل:

$$-\sqrt{1-\xi^2}\,\frac{d}{d\xi}\left[\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)\left(-\sqrt{1-\xi^2}\,\frac{d}{d\xi}W\left(\arccos\xi\right)\right)\right]+\upsilon\left(\upsilon+1\right)\sqrt{1-\xi^2}W\left(\arccos\xi\right)=0 \;\Rightarrow$$

$$\sqrt{1-\xi^2}\,\frac{d}{d\xi}\left[\left(1-\xi^2\right)\frac{dy}{d\xi}\right]+\upsilon\left(\upsilon+1\right)\sqrt{1-\xi^2}\,y=0 \qquad ; \; y=W\left(\arccos\xi\right)\Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\xi}\left[\left(1-\xi^2\right)\frac{dy}{d\xi}\right]+\upsilon\left(\upsilon+1\right)y=0 \quad \cdots\cdots\cdots(7)$$

إن المعادلة (7) تسمى معادلة لوجاندر التفاضلية ، وهي تملك حلاً ضمن الفترة $[-1,1]$ وذلك فقط عندما يكون $\upsilon=n$ عندما $n\geq 0$ عدد صحيح.

وحل هذه المعادلة يعطى بالشكل:

$$y=P_n\left(\xi\right)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\xi^n}\left(1-\xi^2\right)^n \quad \cdots\cdots\cdots(8)$$

حيث أن $P_n\left(\xi\right)$ تدعى كثيرات حدود لوجاندر.

سوف نجد أنَّ من أجل $n=0,1,2,3$

$$P_0\left(\xi\right)=1\;,\;P_1\left(\xi\right)=\xi\;,\;P_2\left(\xi\right)=\frac{1}{2}\left(3\xi^2-1\right)\;,\;P_3\left(\xi\right)=\frac{1}{2}\left(5\xi^3-3\xi\right)\;,\ldots$$

من العلاقتين: (6) و (8) نجد أن الحل الخاص للمعادلة (1):

$$u_n\left(r,\theta\right)=\left[A_n r^n+B_n r^{-(n+1)}\right]P_n\left(\cos\theta\right)$$

علماً أنَّ $P_n\left(\cos\theta\right)$ هي كثيرات حدود لوجاندر.

ومنه فإن الحل العام للمعادلة (1) داخل الكرة التي نصف قطرها R هو:

$$u\left(r,\theta\right)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^n P_n\left(\cos\theta\right)$$

وحل المعادلة (1) خارج الكرة هو:

$$u\left(r,\theta\right)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\,r^{-(n+1)}P_n\left(\cos\theta\right)$$

علماً أنَّ A_n و B_n ثوابت تتعين من الشروط الحدية المعطاة.

ملاحظة: إن حل معادلة لابلاس في الإحداثيات الكروية حالة $u\left(r,\theta\right)$ في المنطقة $R_1<r<R_2$ يعطى بالشكل:

$$u\left(r,\theta\right)=\left(A_n r^n+B_n r^{-(n+1)}\right)P_n\left(\cos\theta\right)$$

حيث أنه :

$$P_0\left(\cos\theta\right)=1\;,\;P_1\left(\cos\theta\right)=\cos\theta\;,\;P_2\left(\cos\theta\right)=\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta-1\right)$$

$$P_3\left(\cos\theta\right)=\frac{1}{2}\left(5\cos^3\theta-3\cos\theta\right)\;,\;P_4\left(\cos\theta\right)=\frac{1}{8}\left(35\cos^4\theta-30\cos^2\theta+3\right)$$

حل التطبيق: أوجد حل المسألة السابقة، والمحقق للشروط الحدية الآتية:

$$\left(u+u_r\right)\Big|_{r=1}=\sin^2\theta$$

الحـــل: إن حل المسألة المعطاة يعطى بالدستور التالي:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^n P_n(\cos\theta)\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

نشتق (1) بالنسبة لـ r فنجد أن:

$$u_r=\sum_{n=1}^{\infty}A_n n r^{n-1}P_n(\cos\theta)$$

ومنه فإنَّ:

$$u+u_r=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(r+n)r^{n-1}P_n(\cos\theta)\Rightarrow$$

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=u+u_r\big|_{r=1}=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(1+n)P_n(\cos\theta)=$$

$$=A_0+2A_1P_1(\cos\theta)+3A_2P_2(\cos\theta)+\cdots\cdots$$

$$=A_0+2A_1\cos\theta+\frac{3}{2}A_2\left(3\cos^2\theta-1\right)+\cdots\cdots\Rightarrow$$

$$1-\cos^2\theta\ =\left(A_0-\frac{3}{2}A_2\right)+2A_1\cos\theta+\frac{9}{2}A_2\cos^2\theta+\cdots\cdots$$

وبمطابقة الطرفين نجد أن:

$$A_0-\frac{3}{2}A_2=1\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

$$\frac{9}{2}A_2=-1\ \cdots\cdots\cdots(**)$$

$$A_1=A_3=\cdots\cdots=0$$

من $(**)$ نجد أن: $\boxed{A_2=-\frac{2}{9}}$ وبالتعويض في $(*)$ نجد أنَّ:

$$A_0-\frac{3}{2}\left(-\frac{2}{9}\right)=1\ \Rightarrow\ A_0+\frac{1}{3}=1\ \Rightarrow\ \boxed{A_0=\frac{2}{3}}$$

وبالتعويض في عبارة الحل (1) نجد أنَّ:

$$u(r,\theta)=A_0+A_2r^2P_2(\cos\theta)=\frac{2}{3}-\frac{2}{9}r^2\left[\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta-1\right)\right]\Rightarrow$$

$$\boxed{u(r,\theta)=\frac{2}{3}-\frac{1}{9}r^2\left(3\cos^2\theta-1\right)}$$

❷(**الفصل الثاني للعام 2011 – 2012**): أوجد حل معادلة لابلاس $\Delta u = 0$ في الاحداثيات الكروية حالة $u(r,\theta)$ **داخل** كرة نصف قطرها $R=1$ ، والمحقق للشرط الحدي الآتي:

$$\left(u-u_r\right)\Big|_{r=1} = 1+\sin^2\theta$$

الحــل: إن حل المسألة المعطاة يعطى بالدستور التالي:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta) \cdots\cdots\cdots(1)$$

نشتق (1) بالنسبة لـ r فنجد أن:

$$u_r = \sum_{n=1}^{\infty} A_n n r^{n-1} P_n(\cos\theta)$$

ومنه فإنَّ:

$$u-u_r = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (r-n) r^{n-1} P_n(\cos\theta) \Rightarrow$$

$$1+\sin^2\theta = 2-\cos^2\theta = u-u_r\Big|_{r=1} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (1-n) P_n(\cos\theta) =$$

$$= A_0 - A_2 P_2(\cos\theta) + \cdots\cdots$$

$$= A_0 - \frac{A_2}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cdots\cdots \Rightarrow$$

$$2-\cos^2\theta = \left(A_0 + \frac{1}{2}A_2\right) - \frac{3}{2}A_2\cos^2\theta + \cdots\cdots$$

وبمطابقة الطرفين نجد أن:

$$A_0 + \frac{1}{2}A_2 = 2 \cdots\cdots\cdots(*) \quad , \quad -\frac{3}{2}A_2 = -1 \cdots\cdots\cdots(**)$$

$$A_3 = A_4 = \cdots\cdots = 0 \quad , \quad \forall A_1$$

من $(**)$ نجد أن: $\boxed{A_2 = \frac{2}{3}}$ وبالتعويض في $(*)$ نجد أنَّ:

$$A_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \Rightarrow A_0 = 2 - \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{A_0 = \frac{5}{3}}$$

وبالتعويض في عبارة الحل (1) نجد أنَّ:

$$u(r,\theta) = A_0 + A_1 r P_1(\cos\theta) + A_2 r^2 P_2(\cos\theta) = \frac{5}{3} + A_1 r\cos\theta + \frac{2}{3}r^2\left[\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right)\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{u(r,\theta) = \frac{5}{3} + A_1 r\cos\theta + \frac{1}{3}r^2\left(3\cos^2\theta - 1\right) \ , \ \forall A_1}$$

من الواضح أن للمسألة المعطاة عدد لانهائي من الحلول.

❸(**الفصل الثاني للعام 2011 – 2012**): أوجد حل معادلة لابلاس $\Delta u = 0$ في الاحداثيات الكروية حالة $u(r,\theta)$ **داخل** كرة نصف قطرها $R=1$ ، والمحقق للشرط الحدي الآتي:

$$(u-u_r)\big|_{r=1} = 1-\cos 2\theta$$

الحــل: إن حل المسألة المعطاة يعطى بالدستور التالي:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta) \cdots\cdots\cdots(1)$$

نشتق (1) بالنسبة لـ r فنجد أن:

$$u_r=\sum_{n=1}^{\infty} A_n n r^{n-1} P_n(\cos\theta)$$

ومنه فإنَّ:

$$u-u_r = A_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n(r-n)r^{n-1}P_n(\cos\theta) \Rightarrow$$

$$1-\cos 2\theta = 2\sin^2\theta = 2-2\cos^2\theta = u-u_r\big|_{r=1} = A_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n(1-n)P_n(\cos\theta)=$$

$$=A_0-A_2P_2(\cos\theta)+\cdots\cdots$$

$$=A_0-\frac{A_2}{2}\left(3\cos^2\theta-1\right)+\cdots\cdots\Rightarrow$$

$$2-2\cos^2\theta = \left(A_0+\frac{1}{2}A_2\right)-\frac{3}{2}A_2\cos^2\theta+\cdots\cdots$$

وبمطابقة الطرفين نجد أن:

$$A_0+\frac{1}{2}A_2=2 \cdots\cdots\cdots(*) \quad , \quad -\frac{3}{2}A_2=-2 \cdots\cdots\cdots(**)$$

$$A_3=A_4=\cdots\cdots=0 \quad , \quad \forall A_1$$

من $(**)$ نجد أن: $\boxed{A_2=\frac{4}{3}}$ وبالتعويض في $(*)$ نجد أنَّ:

$$A_0+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)=2 \Rightarrow A_0=2-\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{A_0=\frac{4}{3}}$$

وبالتعويض في عبارة الحل (1) نجد أنَّ:

$$u(r,\theta)=A_0+A_1rP_1(\cos\theta)+A_2r^2P_2(\cos\theta)=\frac{4}{3}+A_1r\cos\theta+\frac{4}{3}r^2\left[\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta-1\right)\right]\Rightarrow$$

$$\boxed{u(r,\theta)=\frac{4}{3}+A_1r\cos\theta+\frac{2}{3}r^2\left(3\cos^2\theta-1\right) \ , \ \forall A_1}$$

من الواضح أن للمسألة المعطاة عدد لانهائي من الحلول.

❹**(الفصل الأول للعام 2004 – 2005)**: أوجد حل معادلة لابلاس $\Delta u = 0$ في الاحداثيات الكروية حالة $u(r,\theta)$ في المنطقة $1<r<2$ والمحقق للشروط الحدية التالية:

$$u|_{r=1} = \cos^2\theta \quad , \quad u|_{r=2} = \frac{1}{8}\left(\cos^2\theta + 1\right)$$

الحــل: إن حل المسألة المعطاة يعطى بالشكل:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta) \ \cdots\cdots\cdots(\otimes)$$

بتطبيق الشرطيين الحديين على عبارة الحل $(\otimes)$ نجد أنَّ:

تطبيق الشرط الحدي الأول:

$$\cos^2\theta = u|_{r=1} = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n + B_n)P_n(\cos\theta)$$

$$= (A_0+B_0) + (A_1+B_1)\cos\theta + \frac{1}{2}(A_2+B_2)\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cdots\cdots$$

$$= \left[(A_0+B_0) - \frac{1}{2}(A_2+B_2)\right] + (A_1+B_1)\cos\theta + \frac{3}{2}(A_2+B_2)\cos^2\theta + \cdots\cdots$$

وبمطابقة الطرفين نجد أنَّ:

$$(A_0+B_0) - \frac{1}{2}(A_2+B_2) = 0 \ \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{3}{2}(A_2+B_2) = 1 \ \cdots\cdots\cdots(2)$$

$$A_1 + B_1 = 0 \ \cdots\cdots\cdots(3)$$

من (2) نجد أن:

$$(A_2+B_2) = \frac{2}{3} \ \cdots\cdots\cdots(*)$$

نعوض في (1) فنجد أنَّ:

$$(A_0+B_0) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right) = 0 \ \Rightarrow A_0 + B_0 = \frac{1}{3} \ \cdots\cdots\cdots(**)$$

تطبيق الشرط الحدي الثاني:

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos^2\theta = u|_{r=2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n 2^n + B_n 2^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta) =$$

$$= \left(A_0 + \frac{B_0}{2}\right) + \left(2A_1 + \frac{B_1}{4}\right)\cos\theta + \left(4A_2 + \frac{B_2}{8}\right)\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cdots\cdots$$

$$= \left[\left(A_0 + \frac{B_0}{2}\right) - \left(2A_2 + \frac{B_2}{16}\right)\right] + \left(2A_1 + \frac{B_1}{4}\right)\cos\theta + \left(6A_2 + \frac{3B_2}{16}\right)\cos^2\theta + \cdots\cdots$$

وبمطابقة الطرفين نجد أنَّ:

$$\left(A_0+\frac{B_0}{2}\right)-\left(2A_2+\frac{B_2}{16}\right)=\frac{1}{8}\ \cdots\cdots\cdots(1')$$

$$6A_2+\frac{3B_2}{16}=\frac{1}{8}\ \cdots\cdots\cdots(2')$$

$$2A_1+\frac{B_1}{4}=0\ \cdots\cdots\cdots(3')$$

من العلاقة $(2')$ نجد أنَّ:

$$2A_2+\frac{B_2}{16}=\frac{1}{24}\ \cdots\cdots\cdots(*')$$

وبتعويض العلاقة $(*')$ في العلاقة $(1')$ نجد أنَّ:

$$\left(A_0+\frac{B_0}{2}\right)-\left(\frac{1}{24}\right)=\frac{1}{8}\ \Rightarrow\ A_0+\frac{B_0}{2}=\frac{1}{6}\ \cdots\cdots\cdots(*'*')$$

بحل جملة المعادلتين $(3),(3')$ نجد أنَّ: $A_1=B_1=0$.

بحل جملة المعادلتين $(*),(*')$ نجد أنَّ: $A_2=0\ ,\ B_2=\frac{2}{3}$.

بحل جملة المعادلتين $(**),(*'*')$ نجد أنَّ: $A_0=0\ ,\ B_0=\frac{1}{3}$

أما باقي الثوابت فتساوي الصفر ، وبالاستفادة مما سبق نجد أن حل المسألة المعطاة هو:

$$u(r,\theta)=\left(\frac{1}{3r}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3r^3}\right)\left(3\cos^2\theta-1\right)\ \Rightarrow\ \boxed{u(r,\theta)=\frac{1}{3r}+\frac{1}{3r^3}\left(3\cos^2\theta-1\right)}$$

❺**(الفصل الثاني للعام 2003 – 2004):** أوجد حل معادلة لابلاس $\Delta u=0$ في الاحداثيات الكروية حالة $u(r,\theta)$ في المنطقة $1<r<2$ والمحقق للشروط الحدية التالية:

$$u\big|_{r=1}=\cos^2\theta\quad ,\quad u\big|_{r=2}=4\left(\cos^2\theta-\frac{1}{3}\right)$$

الحــل: إن حل المسألة المعطاة يعطى بالشكل:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n+B_n r^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta)\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

بتطبيق الشرطيين الحديين على عبارة الحل $(*)$ نجد أنَّ:

تطبيق الشرط الحدي الأول:

$$\cos^2\theta=u\big|_{r=1}=\sum_{n=0}^{\infty}(A_n+B_n)P_n(\cos\theta)$$

$$=(A_0+B_0)+(A_1+B_1)\cos\theta+\frac{1}{2}(A_2+B_2)\left(3\cos^2\theta-1\right)+\cdots\cdots$$

$$=\left[(A_0+B_0)-\frac{1}{2}(A_2+B_2)\right]+(A_1+B_1)\cos\theta+\frac{3}{2}(A_2+B_2)\cos^2\theta+\cdots\cdots$$

وبمطابقة الطرفين نجد أنَّ:

$$(A_0+B_0)-\frac{1}{2}(A_2+B_2)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{3}{2}(A_2+B_2)=1 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

$$A_1+B_1=0 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

من (2) نجد أن:

$$(A_2+B_2)=\frac{2}{3} \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

نعوض في (1) فنجد أنَّ:

$$(A_0+B_0)-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)=0 \;\Rightarrow\; A_0+B_0=\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots\cdots(**)$$

تطبيق الشرط الحدي الثاني:

$$-\frac{4}{3}+4\cos^2\theta=u\big|_{r=2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n 2^n+B_n 2^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta)=$$

$$=\left(A_0+\frac{B_0}{2}\right)+\left(2A_1+\frac{B_1}{4}\right)\cos\theta+\left(4A_2+\frac{B_2}{8}\right)\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta-1\right)+\cdots\cdots$$

$$=\left[\left(A_0+\frac{B_0}{2}\right)-\left(2A_2+\frac{B_2}{16}\right)\right]+\left(2A_1+\frac{B_1}{4}\right)\cos\theta+\left(6A_2+\frac{3B_2}{16}\right)\cos^2\theta+\cdots\cdots$$

وبمطابقة الطرفين نجد أنَّ:

$$\left(A_0+\frac{B_0}{2}\right)-\left(2A_2+\frac{B_2}{16}\right)=-\frac{4}{3} \quad \cdots\cdots\cdots(1')$$

$$6A_2+\frac{3B_2}{16}=4 \quad \cdots\cdots\cdots(2')$$

$$2A_1+\frac{B_1}{4}=0 \quad \cdots\cdots\cdots(3')$$

من العلاقة $(2')$ نجد أنَّ:

$$2A_2+\frac{B_2}{16}=\frac{4}{3} \quad \cdots\cdots\cdots(*')$$

وبتعويض العلاقة $(*')$ في العلاقة $(1')$ نجد أنَّ:

$$\left(A_0+\frac{B_0}{2}\right)-\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{4}{3} \;\Rightarrow\; A_0+\frac{B_0}{2}=0 \quad \cdots\cdots\cdots(*'*')$$

بحل جملة المعادلتين $(3),(3')$ نجد أنَّ: $A_1=B_1=0$.

بحل جملة المعادلتين $(*),(*')$ نجد أنَّ: $A_2=\frac{2}{3}\;,\;B_2=0$.

بحل جملة المعادلتين $(**)$, $(*'*')$ نجد أنَّ: $A_0=-\frac{1}{3}\,,\,B_0=\frac{2}{3}$

أما باقي الثوابت فتساوي الصفر ، وبالاستفادة مما سبق نجد أن حل المسألة المعطاة هو :

$$u(r\,,\,\theta)=\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3r}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}r^2\right)\left(3\cos^2\theta-1\right)\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{u(r\,,\,\theta)=\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3r}\right)+\frac{1}{3}r^2\left(3\cos^2\theta-1\right)}$$

❻**(الفصل الثاني للعام 2009 – 2010):** أوجد حل معادلة لابلاس $\Delta u=0$ في الاحداثيات الكروية حالة $u(r\,,\,\theta)$ في المنطقة $1<r<2$ والمحقق للشروط الحدية التالية:

$$u\big|_{r=1}=9\cos 2\theta \quad , \quad u\big|_{r=2}=-\frac{3}{2}(5+7\cos 2\theta)$$

الحـــل: إن حل المسألة المعطاة يعطى بالشكل:

$$u(r\,,\,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n+B_n r^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta)\ \cdots\cdots\cdots(\oplus)$$

بتطبيق الشرطيين الحديين على عبارة الحل $(\oplus)$ نجد أنَّ:

تطبيق الشرط الحدي الأول:

$$9\cos 2\theta=9\left(2\cos^2\theta-1\right)=-9+18\cos^2\theta=u\big|_{r=1}=\sum_{n=0}^{\infty}(A_n+B_n)P_n(\cos\theta)$$

$$=(A_0+B_0)+(A_1+B_1)\cos\theta+\frac{1}{2}(A_2+B_2)\left(3\cos^2\theta-1\right)+\cdots\cdots$$

$$=\left[(A_0+B_0)-\frac{1}{2}(A_2+B_2)\right]+(A_1+B_1)\cos\theta+\frac{3}{2}(A_2+B_2)\cos^2\theta+\cdots\cdots$$

وبمطابقة الطرفين نجد أنَّ:

$$(A_0+B_0)-\frac{1}{2}(A_2+B_2)=-9\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{3}{2}(A_2+B_2)=18\ \cdots\cdots\cdots(2)$$

$$A_1+B_1=0\ \cdots\cdots\cdots(3)$$

من (2) نجد أن:

$$(A_2+B_2)=12\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

نعوض في (1) فنجد أنَّ:

$$(A_0+B_0)-\frac{1}{2}(12)=-9\ \Rightarrow\ A_0+B_0=-3\ \cdots\cdots\cdots(**)$$

تطبيق الشرط الحدي الثاني:

نعلم أنَّ:

$$-\frac{3}{2}(5+7\cos 2\theta)=-\frac{3}{2}\left[5+7\left(2\cos^2\theta-1\right)\right]=-\frac{3}{2}\left[5+14\cos^2\theta-7\right]=$$
$$=-\frac{3}{2}\left[-2+14\cos^2\theta\right]=3-21\cos^2\theta$$

وبالتالي فإنَّ:

$$-\frac{3}{2}(5+7\cos 2\theta)=3-21\cos^2\theta=u\big|_{r=2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n 2^n+B_n 2^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta)=$$
$$=\left(A_0+\frac{B_0}{2}\right)+\left(2A_1+\frac{B_1}{4}\right)\cos\theta+\left(4A_2+\frac{B_2}{8}\right)\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta-1\right)+\cdots\cdots$$
$$=\left[\left(A_0+\frac{B_0}{2}\right)-\left(2A_2+\frac{B_2}{16}\right)\right]+\left(2A_1+\frac{B_1}{4}\right)\cos\theta+\left(6A_2+\frac{3B_2}{16}\right)\cos^2\theta+\cdots\cdots$$

وبمطابقة الطرفين نجد أنَّ:

$$\left(A_0+\frac{B_0}{2}\right)-\left(2A_2+\frac{B_2}{16}\right)=3\ \cdots\cdots\cdots(1')$$
$$6A_2+\frac{3B_2}{16}=-21\ \cdots\cdots\cdots(2')$$
$$2A_1+\frac{B_1}{4}=0\ \cdots\cdots\cdots(3')$$

من العلاقة $(2')$ نجد أنَّ:

$$2A_2+\frac{B_2}{16}=-7\ \cdots\cdots\cdots(*')$$

وبتعويض العلاقة $(*')$ في العلاقة $(1')$ نجد أنَّ:

$$\left(A_0+\frac{B_0}{2}\right)-(-7)=3 \Rightarrow\ A_0+\frac{B_0}{2}=-4\ \cdots\cdots\cdots(*'*')$$

بحل جملة المعادلتين $(3),(3')$ نجد أنَّ: $A_1=B_1=0$.

بحل جملة المعادلتين $(*)$, $(*')$ نجد أنَّ: $A_2=-4\ ,\ B_2=16$.

بحل جملة المعادلتين $(**)$, $(*'*')$ نجد أنَّ: $A_0=-5\ ,\ B_0=2$

أما باقي الثوابت فتساوي الصفر.

وبالاستفادة مما سبق نجد أن حل المسألة المعطاة هو:

$$u(r,\theta)=\left(-5+\frac{2}{r}\right)+\frac{1}{2}\left(-4r^2+\frac{16}{r^3}\right)\left(3\cos^2\theta-1\right)\ \Rightarrow$$

$$\boxed{u(r,\theta)=\left(-5+\frac{2}{r}\right)+\left(\frac{8}{r^3}-2r^2\right)\left(3\cos^2\theta-1\right)}$$

❼**(الفصل الأول للعام 2009 – 2010):** أوجد حل معادلة لابلاس $\Delta u = 0$ في الاحداثيات الكروية حالة $u(r,\theta)$ **داخل** كرة نصف قطرها $R=1$ ، والمحقق للشرط الحدي الآتي:

$$(u-u_r)\big|_{r=1} = \frac{4\sin^4\theta}{1-\cos 2\theta}$$

الحــل: إن حل المسألة المعطاة يعطى بالدستور التالي:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta) \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

نشتق (1) بالنسبة لـ r فنجد أن:

$$u_r = \sum_{n=1}^{\infty} A_n n r^{n-1} P_n(\cos\theta)$$

ومنه فإنَّ:

$$u - u_r = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (r-n) r^{n-1} P_n(\cos\theta) \Rightarrow$$

$$\frac{4\sin^4\theta}{1-\cos 2\theta} = \frac{4\sin^4\theta}{2\sin^2\theta} = 2\sin^2\theta = 2-2\cos^2\theta = u-u_r\big|_{r=1} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(1-n)P_n(\cos\theta) =$$

$$= A_0 - A_2 P_2(\cos\theta) + \cdots\cdots$$

$$= A_0 - \frac{A_2}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cdots\cdots \Rightarrow$$

$$2-2\cos^2\theta = \left(A_0 + \frac{1}{2}A_2\right) - \frac{3}{2}A_2\cos^2\theta + \cdots\cdots$$

وبمطابقة الطرفين نجد أن:

$$A_0 + \frac{1}{2}A_2 = 2 \quad \cdots\cdots\cdots(*) \qquad , \qquad -\frac{3}{2}A_2 = -2 \quad \cdots\cdots\cdots(**)$$

$$A_3 = A_4 = \cdots\cdots = 0 \quad , \quad \forall A_1$$

من $(**)$ نجد أن: $\boxed{A_2 = \frac{4}{3}}$ وبالتعويض في $(*)$ نجد أنَّ:

$$A_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right) = 2 \;\Rightarrow\; A_0 = 2 - \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; \boxed{A_0 = \frac{4}{3}}$$

وبالتعويض في عبارة الحل (1) نجد أنَّ:

$$u(r,\theta) = A_0 + A_1 r P_1(\cos\theta) + A_2 r^2 P_2(\cos\theta) = \frac{4}{3} + A_1 r\cos\theta + \frac{4}{3}r^2\left[\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right)\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{u(r,\theta) = \frac{4}{3} + A_1 r\cos\theta + \frac{2}{3}r^2\left(3\cos^2\theta - 1\right) \;,\; \forall A_1}$$

من الواضح أن للمسألة المعطاة عدد لانهائي من الحلول.

القسم الثالث(تمارين على الحالة الكروية العامة $u(r,\theta,\varphi)$):

❶**(الفصل الثاني للعام 2014 – 2015):** أوجد حل معادلة لابلاس $\Delta u=0$ في الإحداثيات الكروية العامة $u(r,\theta,\varphi)$ **داخل** كرة نصف قطرها $R=1$ والمحقق للشرط الحدي الآتي:

$$(u-u_r)\big|_{r=1}=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\sin\left(2\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+1\right](1-\cos 2\theta)$$

ثم استنتج أنَّ للمعادلة عدد لانهائي من الحلول.

الحل: إن حل المسألة الحدية المعطاة يعطى بالدستور التالي:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n(\theta,\varphi)\quad;\quad r\le R$$

ولدينا من نص السؤال أنَّ $R=1$، بالتعويض في عبارة الحل نجد أنَّ:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}r^n Y_n(\theta,\varphi)\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

نشتق العلاقة (1) بالنسبة لـ r فنجد أن:

$$u_r(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}nr^{n-1}Y_n(\theta,\varphi)\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

وبالتالي فإن:

$$u-u_r=Y_0+\sum_{n=1}^{\infty}(r-n)r^{n-1}Y_n(\theta,\varphi)\ \cdots\cdots\cdots(3)$$

ومنه فإن:

$$(u-u_r)\big|_{r=1}=Y_0+\sum_{n=1}^{\infty}(1-n)Y_n(\theta,\varphi)=Y_0+0Y_1-Y_2-2Y_3-\cdots\cdots\cdots$$

$$=a_0-\left[a_2\left(3\cos^2\theta-1\right)+(b_2\cos\varphi+c_2\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta+(d_2\cos 2\varphi+e_2\sin 2\varphi)\sin^2\theta\right]-\cdots$$

كما أنَّ الشرط الحدي المعطى يكتب بالشكل:

$$(u-u_r)\big|_{r=1}=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\sin\left(2\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+1\right](1-\cos 2\theta)=\left[\sqrt{2}\sin\left(2\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+1\right]\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)$$

$$=\left[\sqrt{2}\sin\left(2\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+1\right]\sin^2\theta=\sqrt{2}\sin\left(2\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\sin^2\theta+\sin^2\theta$$

$$=\sqrt{2}\left[\sin 2\varphi\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2\varphi\sin\frac{\pi}{4}\right]\sin^2\theta+\sin^2\theta$$

$$=1-\cos^2\theta+\sqrt{2}\left[\sin 2\varphi\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos 2\varphi\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\sin^2\theta=1-\cos^2\theta+[\cos 2\varphi+\sin 2\varphi]\sin^2\theta$$

إذاً أصبح لدينا أنَّ:

$$1-\cos^2\theta+[\cos 2\varphi+\sin 2\varphi]\sin^2\theta=(u-u_r)\big|_{r=1}=$$

$$=a_0-\left[a_2\left(3\cos^2\theta-1\right)+(b_2\cos\varphi+c_2\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta+(d_2\cos 2\varphi+e_2\sin 2\varphi)\sin^2\theta\right]-\cdots$$

وبمطابقة الطرفين نجد أنَّ:

$$-3a_2=-1\ \Rightarrow\ \boxed{a_2=\frac{1}{3}}$$

$$a_0+a_2=1\ \Rightarrow\ a_0=1-a_2=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\Rightarrow\ \boxed{a_0=\frac{2}{3}}$$

$$\boxed{b_2=c_1=0}\quad,\ \boxed{d_2=-1\,,\ e_2=-1}$$

وبقية الثوابت معدومة، ما عدا a_1,b_1,c_1 ثوابت اختيارية.

وبالتعويض في عبارة الحل (1) نجد أنَّ:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}r^nY_n(\theta,\varphi)=Y_0+rY_1+r^2Y_2+r^3Y_3+\cdots\cdots$$

$$=a_0+r\left[a_1\cos\theta+(b_1\cos\varphi+c_1\sin\varphi)\sin\theta\right]+$$

$$+r^2\left[a_2\left(3\cos^2\theta-1\right)+(b_2\cos\varphi+c_2\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta+(d_2\cos 2\varphi+e_2\sin 2\varphi)\sin^2\theta\right]+\cdots$$

$$=\frac{2}{3}+r\left[a_1\cos\theta+(b_1\cos\varphi+c_1\sin\varphi)\sin\theta\right]+r^2\left[\frac{1}{3}\left(3\cos^2\theta-1\right)-(\cos 2\varphi+\sin 2\varphi)\sin^2\theta\right]$$

وذلك أياً كانت قيم الثوابت a_1,b_1,c_1 ، وبالتالي فإنَّ للمعادلة المعطاة عدد لانهائي من الحلول.

❷**(الفصل الثاني للعام 2004 – 2005):** أوجد حل معادلة لابلاس $\Delta u=0$ في الإحداثيات الكروية العامة $u(r,\theta,\varphi)$ **داخل** كرة نصف قطرها $R=1$ والمحقق للشرط الحدي الآتي:

$$(u+u_r)\big|_{r=1}=\left[\sqrt{2}\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)+2\sin\varphi\cos\varphi+9\right]\sin^2\theta$$

الحل: إن حل المسألة الحدية المعطاة يعطى بالدستور التالي:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^nY_n(\theta,\varphi)\quad;\quad r\le R$$

ولدينا من نص السؤال أنَّ $R=1$، بالتعويض في عبارة الحل نجد أنَّ:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}r^nY_n(\theta,\varphi)\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

نشتق العلاقة (1) بالنسبة لـ r فنجد أن:

$$u_r(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}nr^{n-1}Y_n(\theta,\varphi)\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

وبالتالي فإن:

$$u+u_r=Y_0+\sum_{n=1}^{\infty}(r+n)r^{n-1}Y_n(\theta,\varphi)\ \cdots\cdots\cdots(3)$$

ومنه فإن:

$$\left.(u+u_r)\right|_{r=1}=Y_0+\sum_{n=1}^{\infty}(1+n)Y_n(\theta,\varphi)=Y_0+2Y_1+3Y_2+\cdots\cdots$$

$$=a_0+2\left[a_1\cos\theta+(b_1\cos\varphi+c_1\sin\varphi)\sin\theta\right]+$$

$$+3\left[a_2\left(3\cos^2\theta-1\right)+(b_2\cos\varphi+c_2\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta+(d_2\cos2\varphi+e_2\sin2\varphi)\sin^2\theta\right]+\cdots$$

كما أنَّ الشرط الحدي المعطى يكتب بالشكل:

$$\left[\sqrt{2}\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)+2\sin\varphi\cos\varphi+9\right]\sin^2\theta=$$

$$=\left[\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos2\varphi+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin2\varphi\right]+\sin2\varphi+9\right]\sin^2\theta=(\cos2\varphi+2\sin2\varphi+9)\sin^2\theta=$$

$$=(\cos2\varphi+2\sin2\varphi)\sin^2\theta+9\sin^2\theta=9-9\cos^2\theta+(\cos2\varphi+2\sin2\varphi)\sin^2\theta$$

إذاً أصبح لدينا أنَّ:

$$9-9\cos^2\theta+(\cos2\varphi+2\sin2\varphi)\sin^2\theta=\left.(u+u_r)\right|_{r=1}=$$

$$=a_0+2\left[a_1\cos\theta+(b_1\cos\varphi+c_1\sin\varphi)\sin\theta\right]+$$

$$+3\left[a_2\left(3\cos^2\theta-1\right)+(b_2\cos\varphi+c_2\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta+(d_2\cos2\varphi+e_2\sin2\varphi)\sin^2\theta\right]+\cdots$$

وبمطابقة الطرفين نجد أنَّ:

$$9a_2=-9\ \Rightarrow\ \boxed{a_2=-1}$$

$$a_0-3a_2=9\ \Rightarrow\ a_0=9+3a_2=9+3(-1)=6\Rightarrow\ \boxed{a_0=6}$$

$$2a_1=0\ \Rightarrow\ \boxed{a_1=0}\ ,\ 2b_1=0\ \Rightarrow\ \boxed{b_1=0}\ ,2c_1=0\ \Rightarrow\ \boxed{c_1=0}$$

$$3b_2=0\ \Rightarrow\ \boxed{b_2=0}\ ,3c_2=0\ \Rightarrow\ \boxed{c_2=0}$$

$$3d_2=1\Rightarrow\ \boxed{d_2=\frac{1}{3}}\ ,\ 3e_2=2\ \Rightarrow\ \boxed{e_2=\frac{2}{3}}$$

وبقية الثوابت معدومة، وبالتعويض في عبارة الحل (1) نجد أنَّ:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}r^nY_n(\theta,\varphi)=Y_0+rY_1+r^2Y_2+r^3Y_3+\cdots\cdots$$

$$=a_0+r\left[a_1\cos\theta+(b_1\cos\varphi+c_1\sin\varphi)\sin\theta\right]+$$

$$+r^2\left[a_2\left(3\cos^2\theta-1\right)+(b_2\cos\varphi+c_2\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta+(d_2\cos2\varphi+e_2\sin2\varphi)\sin^2\theta\right]+\cdots.$$

$$\boxed{u(r,\theta,\varphi)=6+r^2\left[-\left(3\cos^2\theta-1\right)+\left(\frac{1}{3}\cos2\varphi+\frac{2}{3}\sin2\varphi\right)\sin^2\theta\right]}$$

❸(**الفصل الثاني للعام 2005 – 2006**): أوجد حل معادلة لابلاس $\Delta u = 0$ في الإحداثيات الكروية العامة $u(r, \theta, \varphi)$ **داخل** كرة نصف قطرها $R = 1$ والمحقق للشرط الحدي الآتي:

$$\left(u + u_r\right)\Big|_{r=1} = \left[\sqrt{2}\cos\left(2\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos^2\varphi\right]\sin^2\theta$$

الحل: إن حل المسألة الحدية المعطاة يعطى بالدستور التالي:

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n(\theta, \varphi) \quad ; \quad r \le R$$

ولدينا من نص السؤال أنَّ $R = 1$، بالتعويض في عبارة الحل نجد أنَّ:

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\theta, \varphi) \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

نشتق العلاقة (1) بالنسبة لـ r فنجد أن:

$$u_r(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} Y_n(\theta, \varphi) \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

وبالتالي فإن:

$$u + u_r = Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(r+n) r^{n-1} Y_n(\theta, \varphi) \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

ومنه فإن:

$$\left(u + u_r\right)\Big|_{r=1} = Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(1+n) Y_n(\theta, \varphi) = Y_0 + 2Y_1 + 3Y_2 + \cdots\cdots\cdots$$

$$= a_0 + 2\left[a_1\cos\theta + (b_1\cos\varphi + c_1\sin\varphi)\sin\theta\right] +$$

$$+3\left[a_2\left(3\cos^2\theta - 1\right) + (b_2\cos\varphi + c_2\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta + (d_2\cos 2\varphi + e_2\sin 2\varphi)\sin^2\theta\right] + \cdots$$

كما أنَّ الشرط الحدي المعطى يكتب بالشكل:

$$\left[\sqrt{2}\cos\left(2\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos^2\varphi\right]\sin^2\theta =$$

$$= \left[\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\varphi\right] + 1 + \cos 2\varphi\right]\sin^2\theta = \left(\cos 2\varphi - \sin 2\varphi + \cos 2\varphi + 1\right)\sin^2\theta =$$

$$= \left(2\cos 2\varphi - \sin 2\varphi\right)\sin^2\theta + \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta + \left(2\cos 2\varphi - \sin 2\varphi\right)\sin^2\theta$$

إذاً أصبح لدينا أنَّ:

$$1 - \cos^2\theta + \left(2\cos 2\varphi - \sin 2\varphi\right)\sin^2\theta = \left(u + u_r\right)\Big|_{r=1} =$$

$$= a_0 + 2\left[a_1\cos\theta + (b_1\cos\varphi + c_1\sin\varphi)\sin\theta\right] +$$

$$+3\left[a_2\left(3\cos^2\theta - 1\right) + (b_2\cos\varphi + c_2\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta + (d_2\cos 2\varphi + e_2\sin 2\varphi)\sin^2\theta\right] + \cdots$$

وبمطابقة الطرفين نجد أنَّ:

$$9a_2=-1 \Rightarrow \boxed{a_2=-\frac{1}{9}}$$

$$a_0-3a_2=1 \Rightarrow a_0=1+3a_2=1+3\left(-\frac{1}{9}\right)=\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{a_0=\frac{2}{3}}$$

$$2a_1=0 \Rightarrow \boxed{a_1=0}\ ,\ 2b_1=0 \Rightarrow \boxed{b_1=0}\ ,2c_1=0 \Rightarrow \boxed{c_1=0}$$

$$3b_2=0 \Rightarrow \boxed{b_2=0}\ ,3c_2=0 \Rightarrow \boxed{c_2=0}$$

$$3d_2=2 \Rightarrow \boxed{d_2=\frac{2}{3}}\ ,\ 3e_2=-1 \Rightarrow \boxed{e_2=-\frac{1}{3}}$$

وبقية الثوابت معدومة، وبالتعويض في عبارة الحل (1) نجد أنَّ:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\theta,\varphi)=Y_0+rY_1+r^2Y_2+r^3Y_3+\cdots\cdots$$

$$=a_0+r\left[a_1\cos\theta+(b_1\cos\varphi+c_1\sin\varphi)\sin\theta\right]+$$

$$+r^2\left[a_2\left(3\cos^2\theta-1\right)+(b_2\cos\varphi+c_2\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta+(d_2\cos 2\varphi+e_2\sin 2\varphi)\sin^2\theta\right]+\cdots$$

$$\boxed{u(r,\theta,\varphi)=\frac{2}{3}+r^2\left[-\frac{1}{9}\left(3\cos^2\theta-1\right)+\left(\frac{2}{3}\cos 2\varphi-\frac{1}{3}\sin 2\varphi\right)\sin^2\theta\right]}$$

❹**(الفصل الثاني للعام 2002 – 2003):** أوجد حل معادلة لابلاس $\Delta u=0$ في الإحداثيات الكروية العامة $u(r,\theta,\varphi)$ **داخل** كرة نصف قطرها R والمحقق للشرط الحدي الآتي:

$$(u+u_r)\big|_{r=R}=[\sin\varphi+\cos\varphi\cos\theta+\sin\theta]\sin\theta$$

الحل: إن حل المسألة الحدية المعطاة يعطى بالدستور التالي:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n(\theta,\varphi)\quad ;\quad r\le R\quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

نشتق العلاقة (1) بالنسبة لـ r فنجد أن:

$$u_r(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{1}{R}\left(\frac{r}{R}\right)^{n-1} Y_n(\theta,\varphi)\quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

وبالتالي فإن:

$$u+u_r=Y_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}+\frac{n}{R}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^{n-1} Y_n(\theta,\varphi)\ \cdots\cdots\cdots(3)$$

ومنه فإن:

$$(u+u_r)\big|_{r=1}=Y_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{n}{R}\right)Y_n(\theta,\varphi)=Y_0+\left(1+\frac{1}{R}\right)Y_1+\left(1+\frac{2}{R}\right)Y_2+\cdots\cdots\cdots$$

$$=a_0+\left(1+\frac{1}{R}\right)\left[a_1\cos\theta+(b_1\cos\varphi+c_1\sin\varphi)\sin\theta\right]+$$
$$+\left(1+\frac{2}{R}\right)\left[a_2\left(3\cos^2\theta-1\right)+(b_2\cos\varphi+c_2\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta+(d_2\cos2\varphi+e_2\sin2\varphi)\sin^2\theta\right]+\cdots$$

كما أنَّ الشرط الحدي المعطى يكتب بالشكل:

$$[\sin\varphi+\cos\varphi\cos\theta+\sin\theta]\sin\theta=\sin\varphi\sin\theta+\cos\varphi\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta$$
$$=\sin\varphi\sin\theta+1-\cos^2\theta+\cos\varphi\sin\theta\cos\theta$$

إذاً أصبح لدينا أنَّ:

$$\sin\varphi\sin\theta+1-\cos^2\theta+\cos\varphi\sin\theta\cos\theta=(u+u_r)\big|_{r=1}=$$
$$=a_0+\left(1+\frac{1}{R}\right)\left[a_1\cos\theta+(b_1\cos\varphi+c_1\sin\varphi)\sin\theta\right]+$$
$$+\left(1+\frac{2}{R}\right)\left[a_2\left(3\cos^2\theta-1\right)+(b_2\cos\varphi+c_2\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta+(d_2\cos2\varphi+e_2\sin2\varphi)\sin^2\theta\right]+\cdots$$

وبمطابقة الطرفين نجد أنَّ:

$$3\left(\frac{R+2}{R}\right)a_2=-1\ \Rightarrow\ \boxed{a_2=-\frac{R}{3(R+2)}}$$
$$a_0-\left(\frac{R+2}{R}\right)a_2=1\ \Rightarrow\ a_0=1+\left(\frac{R+2}{R}\right)a_2=1-\left(\frac{R+2}{R}\right)\left(\frac{R}{3(R+2)}\right)=\frac{2}{3}\Rightarrow\ \boxed{a_0=\frac{2}{3}}$$
$$\left(\frac{R+1}{R}\right)a_1=0\Rightarrow\boxed{a_1=0}\ ,\ \left(\frac{R+1}{R}\right)b_1=0\Rightarrow\boxed{b_1=0}\ ,\left(\frac{R+1}{R}\right)c_1=1\Rightarrow\boxed{c_1=\frac{R}{R+1}}$$
$$\left(\frac{R+2}{R}\right)b_2=1\Rightarrow\boxed{b_2=\frac{R}{R+2}}\ ,\left(\frac{R+2}{R}\right)c_2=0\Rightarrow\boxed{c_2=0}$$
$$\left(\frac{R+2}{R}\right)d_2=0\Rightarrow\boxed{d_2=0}\ ,\ \left(\frac{R+2}{R}\right)e_2=0\Rightarrow\boxed{e_2=0}$$

وبقية الثوابت معدومة، وبالتعويض في عبارة الحل (1) نجد أنَّ:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n(\theta,\varphi)=Y_0+\left(\frac{r}{R}\right)Y_1+\left(\frac{r}{R}\right)^2Y_2+\cdots\cdots$$
$$=a_0+\left(\frac{r}{R}\right)\left[a_1\cos\theta+(b_1\cos\varphi+c_1\sin\varphi)\sin\theta\right]+$$
$$+\left(\frac{r}{R}\right)^2\left[a_2\left(3\cos^2\theta-1\right)+(b_2\cos\varphi+c_2\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta+(d_2\cos2\varphi+)\sin^2\theta\right]+\cdots$$

$$= \frac{2}{3} + \left(\frac{r}{R}\right)\left[\frac{R}{R+1}\sin\varphi\sin\theta\right] +$$

$$+ \left(\frac{r}{R}\right)^2\left[-\frac{R}{3(R+2)}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \frac{R}{(R+2)}\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\right]$$

$$\boxed{u(r,\theta,\varphi) = \frac{2}{3} + \frac{r}{(R+1)}\sin\varphi\sin\theta + \frac{r^2}{R(R+2)}\left[-\frac{1}{3}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cos\varphi\sin\theta\cos\theta\right]}$$

❺**(الفصـل الثـاني للعـام 2003 – 2004):** أوجد حل معادلـة لابـلاس $\Delta u = 0$ فـي الإحـداثيات الكرويـة العامـة $u(r, \theta, \varphi)$ **داخل** كرة نصف قطرها $R = 1$ والمحقق للشرط الحدي الآتي:

$$\left(u + u_r\right)\Big|_{r=1} = \cos\left(2\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\sin^2\theta$$

الحـل: إن حل المسألة الحدية المعطاة يعطى بالدستور التالي:

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n(\theta,\varphi) \quad ; \quad r \le R$$

ولدينا من نص السؤال أنَّ $R = 1$، بالتعويض في عبارة الحل نجد أنَّ:

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\theta,\varphi) \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

نشتق العلاقة (1) بالنسبة لـ r فنجد أن:

$$u_r(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} Y_n(\theta,\varphi) \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

وبالتالي فإن:

$$u + u_r = Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(r+n) r^{n-1} Y_n(\theta,\varphi) \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

ومنه فإن:

$$\left(u + u_r\right)\Big|_{r=1} = Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(1+n) Y_n(\theta,\varphi) = Y_0 + 2Y_1 + 3Y_2 + \cdots\cdots\cdots$$

$$= a_0 + 2\left[a_1\cos\theta + \left(b_1\cos\varphi + c_1\sin\varphi\right)\sin\theta\right] +$$

$$+3\left[a_2\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \left(b_2\cos\varphi + c_2\sin\varphi\right)\sin\theta\cos\theta + \left(d_2\cos2\varphi + e_2\sin2\varphi\right)\sin^2\theta\right] + \cdots$$

كما أنَّ الشرط الحدي المعطى يكتب بالشكل:

$$\cos\left(2\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\sin^2\theta = \left[\frac{1}{2}\cos2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\varphi\right]\sin^2\theta$$

إذاً أصبح لدينا أنَّ:

$$\left[\frac{1}{2}\cos 2\varphi-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\varphi\right]\sin^2\theta=(u+u_r)\big|_{r=1}=$$
$$=a_0+2\left[a_1\cos\theta+(b_1\cos\varphi+c_1\sin\varphi)\sin\theta\right]+$$
$$+3\left[a_2\left(3\cos^2\theta-1\right)+(b_2\cos\varphi+c_2\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta+(d_2\cos 2\varphi+e_2\sin 2\varphi)\sin^2\theta\right]+\cdots$$

وبمطابقة الطرفين نجد أنَّ:

$$9a_2=0\ \Rightarrow \boxed{a_2=0}$$
$$a_0-3a_2=0\ \Rightarrow a_0=3a_2=3(0)=0\Rightarrow \boxed{a_0=0}$$
$$2a_1=0\ \Rightarrow \boxed{a_1=0}\ ,\ 2b_1=0\Rightarrow \boxed{b_1=0}\ ,2c_1=0\Rightarrow \boxed{c_1=0}$$
$$3b_2=0\ \Rightarrow \boxed{b_2=0}\ ,3c_2=0\Rightarrow \boxed{c_2=0}$$
$$3d_2=\frac{1}{2}\ \Rightarrow \boxed{d_2=\frac{1}{6}}\ ,\ 3e_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \boxed{e_2=\frac{\sqrt{3}}{6}}$$

وبقية الثوابت معدومة، وبالتعويض في عبارة الحل (1) نجد أنَّ:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}r^nY_n(\theta,\varphi)=Y_0+rY_1+r^2Y_2+r^3Y_3+\cdots\cdots$$
$$=a_0+r\left[a_1\cos\theta+(b_1\cos\varphi+c_1\sin\varphi)\sin\theta\right]+$$
$$+r^2\left[a_2\left(3\cos^2\theta-1\right)+(b_2\cos\varphi+c_2\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta+(d_2\cos 2\varphi+e_2\sin 2\varphi)\sin^2\theta\right]+\cdots$$

$$\boxed{u(r,\theta,\varphi)=r^2\left(\frac{1}{6}\cos 2\varphi+\frac{\sqrt{3}}{6}\sin 2\varphi\right)\sin^2\theta}$$

❻**(الفصل الثاني للعام 2010 – 2011):** أوجد حل معادلة لابلاس $\Delta u=0$ في الإحداثيات الكروية العامة $u(r,\theta,\varphi)$ **داخل** كرة نصف قطرها $R=1$ والمحقق للشرط الحدي الآتي:

$$(u+u_r)\big|_{r=1}=\left[\sqrt{2}\sin\left(2\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+2\sin^2\varphi\right]\sin^2\theta+\cos\theta$$

الحل: إن حل المسألة الحدية المعطاة يعطى بالدستور التالي:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^nY_n(\theta,\varphi)\quad ;\quad r\le R$$

ولدينا من نص السؤال أنَّ $R=1$، بالتعويض في عبارة الحل نجد أنَّ:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}r^nY_n(\theta,\varphi)\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

نشتق العلاقة (1) بالنسبة لـ r فنجد أن:

$$u_r(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} Y_n(\theta,\varphi) \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

وبالتالي فإن:

$$u+u_r=Y_0+\sum_{n=1}^{\infty}(r+n) r^{n-1} Y_n(\theta,\varphi) \cdots\cdots\cdots(3)$$

ومنه فإن:

$$\left.(u+u_r)\right|_{r=1}=Y_0+\sum_{n=1}^{\infty}(1+n) Y_n(\theta,\varphi)=Y_0+2Y_1+3Y_2+\cdots\cdots\cdots$$
$$=a_0+2\left[a_1\cos\theta+(b_1\cos\varphi+c_1\sin\varphi)\sin\theta\right]+$$
$$+3\left[a_2\left(3\cos^2\theta-1\right)+(b_2\cos\varphi+c_2\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta+(d_2\cos 2\varphi+e_2\sin 2\varphi)\sin^2\theta\right]+\cdots$$

كما أنَّ الشرط الحدي المعطى يكتب بالشكل:

$$\left[\sqrt{2}\sin\left(2\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+2\sin^2\varphi\right]\sin^2\theta+\cos\theta=$$
$$=\left[\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\varphi+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2\varphi\right]+1-\cos 2\varphi\right]\sin^2\theta+\cos\theta=$$
$$=(\cos 2\varphi+\sin 2\varphi-\cos 2\varphi+1)\sin^2\theta+\cos\theta=(\sin 2\varphi+1)\sin^2\theta+\cos\theta=$$
$$=\sin 2\varphi\sin^2\theta+\sin^2\theta+\cos\theta=\cos\theta+1-\cos^2\theta+\sin 2\varphi\sin^2\theta$$

إذاً أصبح لدينا أنَّ:

$$\cos\theta+1-\cos^2\theta+\sin 2\varphi\sin^2\theta=\left.(u+u_r)\right|_{r=1}=$$
$$=a_0+2\left[a_1\cos\theta+(b_1\cos\varphi+c_1\sin\varphi)\sin\theta\right]+$$
$$+3\left[a_2\left(3\cos^2\theta-1\right)+(b_2\cos\varphi+c_2\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta+(d_2\cos 2\varphi+e_2\sin 2\varphi)\sin^2\theta\right]+\cdots$$

وبمطابقة الطرفين نجد أنَّ:

$$9a_2=-1 \Rightarrow \boxed{a_2=-\frac{1}{9}}$$

$$a_0-3a_2=1 \Rightarrow a_0=1+3a_2=1+3\left(-\frac{1}{9}\right)=\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{a_0=\frac{2}{3}}$$

$$2a_1=1 \Rightarrow \boxed{a_1=\frac{1}{2}} \ , \ 2b_1=0 \Rightarrow \boxed{b_1=0} \ , 2c_1=0 \Rightarrow \boxed{c_1=0}$$

$$3b_2=0 \Rightarrow \boxed{b_2=0} \ , 3c_2=0 \Rightarrow \boxed{c_2=0}$$

$$3d_2=0 \Rightarrow \boxed{d_2=0} \ , \ 3e_2=1 \Rightarrow \boxed{e_2=\frac{1}{3}}$$

وبقية الثوابت معدومة، وبالتعويض في عبارة الحل (1) نجد أنَّ:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\theta,\varphi)=Y_0+rY_1+r^2Y_2+r^3Y_3+\cdots\cdots$$

$$=a_0+r\left[a_1\cos\theta+(b_1\cos\varphi+c_1\sin\varphi)\sin\theta\right]+$$

$$+r^2\left[a_2\left(3\cos^2\theta-1\right)+(b_2\cos\varphi+c_2\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta+(d_2\cos 2\varphi+e_2\sin 2\varphi)\sin^2\theta\right]+\cdots$$

$$\boxed{u(r,\theta,\varphi)=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}r\cos\theta+r^2\left[-\frac{1}{9}\left(3\cos^2\theta-1\right)+\frac{1}{3}\sin 2\varphi\sin^2\theta\right]}$$

❼**(الدورة الاضافية للعام 2014 – 2015):** أوجد حل معادلة لابلاس $\Delta u=0$ في الإحداثيات الكروية العامة $u(r,\theta,\varphi)$ **خارج** كرة نصف قطرها $R=1$ والمحقق للشرط الحدي الآتي:

$$\left.(u-u_r)\right|_{r=1}=\sin\theta\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$$

الحل: إن حل المسألة الحدية المعطاة يعطى بالدستور التالي:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{(n+1)}Y_n(\theta,\varphi)\quad,\quad r\geq R$$

ولدينا من نص السؤال أنَّ $R=1$، بالتعويض في عبارة الحل نجد أنَّ:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} r^{-(n+1)}Y_n(\theta,\varphi)\ \cdots\cdots(1)$$

نشتق العلاقة (1) بالنسبة لـ r فنجد أن:

$$u_r(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}-(n+1)r^{-(n+2)}Y_n(\theta,\varphi)\ \cdots\cdots(2)$$

وبالتالي فإن:

$$u-u_r=\sum_{n=0}^{\infty}\left[r+(n+1)\right]r^{-(n+2)}Y_n(\theta,\varphi)\cdots\cdots(3)$$

ومنه فإن:

$$\left.(u-u_r)\right|_{r=1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+(n+1)\right]Y_n(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)Y_n(\theta,\varphi)$$

$$=2Y_0+3Y_1+4Y_2+\cdots\cdots$$

$$=2a_0+3\left[a_1\cos\theta+(b_1\cos\varphi+c_1\sin\varphi)\sin\theta\right]+$$

$$+4\left[a_2\left(3\cos^2\theta-1\right)+(b_2\cos\varphi+c_2\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta+(d_2\cos 2\varphi+e_2\sin 2\varphi)\sin^2\theta\right]+\cdots$$

كما أنَّ الشرط الحدي المعطى يكتب بالشكل:

$$\left.(u-u_r)\right|_{r=1}=\sin\theta\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\theta\left[\frac{1+\cos\theta}{2}\right]\left[\frac{1}{2}\cos\varphi+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\right]$$

$$=\left[\frac{1}{4}\cos\varphi+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\varphi\right]\sin\theta+\left[\frac{1}{4}\cos\varphi+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\varphi\right]\sin\theta\cos\theta$$

إذاً أصبح لدينا أنَّ:

$$\left[\frac{1}{4}\cos\varphi+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\varphi\right]\sin\theta+\left[\frac{1}{4}\cos\varphi+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\varphi\right]\sin\theta\cos\theta=(u-u_r)\big|_{r=1}=$$

$$=2a_0+3\left[a_1\cos\theta+(b_1\cos\varphi+c_1\sin\varphi)\sin\theta\right]+$$

$$+4\left[a_2\left(3\cos^2\theta-1\right)+(b_2\cos\varphi+c_2\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta+(d_2\cos 2\varphi+e_2\sin 2\varphi)\sin^2\theta\right]+\cdots$$

وبمطابقة الطرفين نجد أنَّ:

$$12a_2=0\ \Rightarrow \boxed{a_2=0}$$

$$2a_0-4a_2=0\ \Rightarrow a_0=2a_2=2(0)=0\Rightarrow \boxed{a_0=0}$$

$$3b_1=\frac{1}{4}\Rightarrow\boxed{b_1=\frac{1}{12}}\quad,\quad 3c_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\ \Rightarrow\ \boxed{c_1=\frac{\sqrt{3}}{12}}$$

$$4b_2=\frac{1}{4}\Rightarrow\boxed{b_2=\frac{1}{16}}\quad,\quad 4c_2=\frac{\sqrt{3}}{4}\ \Rightarrow\ \boxed{c_2=\frac{\sqrt{3}}{16}}$$

$$4d_2=0\ ,\ 4e_2=0\ \Rightarrow\boxed{d_2=0\ ,\ e_2=0}$$

وبقية الثوابت معدومة، وبالتعويض في عبارة الحل (1) نجد أنَّ:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}r^{-(n+1)}Y_n(\theta,\varphi)=\frac{1}{r}Y_0+\frac{1}{r^2}Y_1+\frac{1}{r^3}Y_2+\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{a_0}{r}+\frac{1}{r^2}\left[a_1\cos\theta+(b_1\cos\varphi+c_1\sin\varphi)\sin\theta\right]+$$

$$+\frac{1}{r^3}\left[a_2\left(3\cos^2\theta-1\right)+(b_2\cos\varphi+c_2\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta+(d_2\cos 2\varphi+e_2\sin 2\varphi)\sin^2\theta\right]+\cdots$$

$$\boxed{u(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{1}{12}\cos\varphi+\frac{\sqrt{3}}{12}\sin\varphi\right)\sin\theta\right]+\frac{1}{r^3}\left[\left(\frac{1}{16}\cos\varphi+\frac{\sqrt{3}}{16}\sin\varphi\right)\sin\theta\cos\theta\right]}$$

تمارين غير محلولة:

❶**(الفصل الأول للعام 2014 – 2014):** أوجد حل معادلة لابلاس $\Delta u=0$ في الاحداثيات الكروية حالة $u(r,\theta)$ **داخل** كرة نصف قطرها $R=1$، والمحقق للشرط الحدي الآتي:

$$(u-u_r)\big|_{r=1}=\frac{3}{2}\sin^2\theta$$

✍ انتهى الفصل الرابع – أحمد حاتم أبو حاتم

تمرينات غير محلولة (الفصل الأول):

❶ **(الفصل الأول للعام 2005 – 2006):** أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$x^2u_{xx}-y^2u_{yy}-2yu_y=0$$

في المنطقة $y>0$ ، ثم أوجد الحل الخاص والمحقق للشروط الابتدائية:

$$u\big|_{x=1}=y \quad , \quad u_x\big|_{x=1}=y$$

الحل: لدينا من المعادلة أنَّ: $A=x^2 \ , \ 2B=0 \Rightarrow B=0 \ , \ C=-y^2$ وبالتالي فإنَّ:

$$B^2-AC=0-x^2\left(-y^2\right)=x^2y^2>0$$

وبالتالي فالمعادلة المعطاة من النمط الزائدي، ولحلها نوجد المعادلة المميزة لها:

$$Ady^2-2Bdxdy+Cdx^2=0 \Rightarrow x^2dy^2-y^2dx^2=0 \Rightarrow$$

$$(xdy+ydx)(xdy-ydx)=0 \Rightarrow \begin{cases}(xdy+ydx)=0 \Rightarrow xy=c_1\\ xdy-ydx=0 \Rightarrow \dfrac{y}{x}=c_2\end{cases}$$

وبأخذ $\eta=\dfrac{y}{x} \ , \ \xi=xy$ ، ثم بحساب المشتقات نجد أن:

$$\xi_x=y \ , \ \xi_{xx}=0 \ , \ \xi_y=x \ , \ \xi_{yy}=0 \ , \ \xi_{xy}=1$$

$$\eta_x=-\frac{y}{x^2} \ , \ \eta_{xx}=\frac{2y}{x^3} \ , \ \eta_y=\frac{1}{x} \ , \ \eta_{yy}=0 \ , \ \eta_{xy}=-\frac{1}{x^2}$$

ولدينا:

$$u_{xx}=\xi_x^2u_{\xi\xi}+\eta_x^2u_{\eta\eta}+2\xi_x\eta_xu_{\xi\eta}+\xi_{xx}u_\xi+\eta_{xx}u_\eta \Rightarrow \boxed{u_{xx}=y^2u_{\xi\xi}+\frac{y^2}{x^4}u_{\eta\eta}-2\frac{y^2}{x^2}u_{\xi\eta}+\frac{2y}{x^3}u_\eta}$$

$$u_{yy}=\xi_y^2u_{\xi\xi}+\eta_y^2u_{\eta\eta}+2\xi_y\eta_yu_{\xi\eta}+\xi_{yy}u_\xi+\eta_{yy}u_\eta \Rightarrow \boxed{u_{yy}=x^2u_{\xi\xi}+\frac{1}{x^2}u_{\eta\eta}+2u_{\xi\eta}}$$

$$u_y=\xi_yu_\xi+\eta_yu_\eta \Rightarrow \boxed{u_y=xu_\xi+\frac{1}{x}u_\eta}$$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية نجد أن:

أمثال $u_{\xi\xi}$ هي: $x^2\left(y^2\right)-y^2\left(x^2\right)=0$

أمثال $u_{\eta\eta}$ هي:

$$x^2\left(\frac{y^2}{x^4}\right)-y^2\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{y^2}{x^2}-\frac{y^2}{x^2}=0$$

أمثال $u_{\xi\eta}$ هي:

$$x^2\left(-2\frac{y}{x^2}\right)-y^2(2)=-2y^2-2y^2=-4y^2$$

أمثال u_η هي:

$$x^2\left(2\frac{y}{x^3}\right)-2y\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2y}{x}-\frac{2y}{x}=0$$

أمثال u_ξ هي:

$$-2y\,.\,x=-2xy$$

وبعد التعويض والاختصار نجد أن :

$$-4y^2u_{\xi\eta}-2xy\,u_\xi=0\;\;\Rightarrow\;\;u_{\xi\eta}+\frac{x}{2y}u_\xi=0$$

وبما أن $\frac{y}{x}=\eta$ فإنَّ $\frac{x}{y}=\frac{1}{\eta}$ ومنه فالمعادلة الأخيرة تكتب بالشكل:

$$\boxed{u_{\xi\eta}+\frac{1}{2\eta}u_\xi=0}$$

وهي المعادلة المطلوبة بالشكل النموذجي، ولنوجد حلها:

$$u_{\xi\eta}+\frac{1}{2\eta}u_\xi=0\;\;\Rightarrow\;\;\frac{\partial}{\partial\xi}\left[u_\eta+\frac{1}{2\eta}u\right]=0$$

بتثبيت η والمكاملة بالنسبة لـ ξ نجد أنَّ:

$$u_\eta+\frac{1}{2\eta}u=\psi_1(\eta)$$

وبتثبيت ξ نحصل على معادلة تفاضلية بالدالة u والمتحول المستقل η ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu=e^{\int\left(\frac{1}{2\eta}\right)d\eta}=e^{\frac{1}{2}\ln(\eta)}=e^{\ln\left(\sqrt{\eta}\right)}=\sqrt{\eta}$$

وبضرب المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\sqrt{\eta}u\right]=\sqrt{\eta}\psi_1(\eta)=\psi_2(\eta)\;\;\Rightarrow\sqrt{\eta}u=\int\psi_2(\eta)d\eta+\varphi(\xi)=\varphi(\xi)+\psi(\eta)\;\;\Rightarrow$$

$$\boxed{u(\xi,\eta)=\frac{1}{\sqrt{\eta}}\left[\varphi(\xi)+\psi(\eta)\right]=\eta^{-\frac{1}{2}}\left[\varphi(\xi)+\psi(\eta)\right]}$$

وبالعودة للمتحولات القديمة $\xi=xy\;\;,\;\;\eta=\frac{y}{x}$ نجد أن الحل العام للمعادلة المطلوبة:

$$u(x,y)=\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\varphi(xy)+\psi\left(\frac{y}{x}\right)\right]\Rightarrow\;\boxed{u(x,y)=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\right)\left[\varphi(xy)+\psi\left(\frac{y}{x}\right)\right]}$$

ولإيجاد الحل الخاص المطلوب نطبق الشروط الابتدائية على الحل العام بالشكل:

نطبق الشرط الابتدائي الأول:

$$y=u|_{x=1}=\frac{1}{\sqrt{y}}\left[\varphi(y)+\psi(y)\right]\;\;\Rightarrow\;\;\varphi(y)+\psi(y)=y\sqrt{y}\quad\cdots\cdots\cdots(*)$$

نشتق الحل العام بالنسبة لـ x تمهيداً لتطبيق الشرط الابتدائي الثاني:

$$u_x = \frac{1}{2\sqrt{x\,y}}\left[\varphi(xy)+\psi\left(\frac{y}{x}\right)\right]+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\left[y\,\varphi'(xy)-\frac{y}{x^2}\psi'\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

وبتطبيق الشرط الابتدائي الثاني نجد أنَّ:

$$y = u_x\big|_{x=1} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[\varphi(y)+\psi(y)\right]+\frac{1}{\sqrt{y}}\left[y\,\varphi'(y)-y\,\psi'(y)\right]$$

وبالاستفادة من العلاقة $(*)$ نجد أنَّ العلاقة الأخيرة تكتب بالشكل:

$$y = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[y\sqrt{y}\right]+\frac{1}{\sqrt{y}}\left[y\,\varphi'(y)-y\,\psi'(y)\right] \Rightarrow y = \frac{1}{2}y+\sqrt{y}\left[\varphi'(y)-\psi'(y)\right] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}y = \sqrt{y}\left[\varphi'(y)-\psi'(y)\right] \Rightarrow \varphi'(y)-\psi'(y)=\frac{1}{2}\sqrt{y}\ \cdots\cdots\cdots(**)$$

وباشتقاق العلاقة $(*)$ بالنسبة لـ y نجد أنَّ:

$$\varphi'(y)+\psi'(y)=\frac{3}{2}\sqrt{y}\ \cdots\cdots\cdots(*')$$

وبجمع العلاقة $(*')$ مع العلاقة $(**)$ نجد أنَّ:

$$2\varphi'(y)=2\sqrt{y} \Rightarrow \varphi'(y)=\sqrt{y} \Rightarrow \varphi(y)=\frac{2}{3}y\sqrt{y}=\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$\frac{2}{3}y\sqrt{y}+\psi(y)=y\sqrt{y} \Rightarrow \psi(y)=\frac{1}{3}y\sqrt{y}=\frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}}$$

بالاستفادة مما سبق والتعويض في الحل العام نجد أنَّ الحل الخاص المطلوب هو:

$$u(x,y)=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\right)\left[\frac{2}{3}(xy)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{2}}\right] \Rightarrow \boxed{u(x,y)=\frac{2}{3}x^2y+\frac{1}{3}\frac{y}{x}}$$

❷ **(الفصل الأول للعام 2007 – 2008)** لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الآتية:

$$xu_{xx}-u_{yy}+\frac{1}{2}u_x=-4$$

وبفرض $x>0$، والمطلوب:

1) أوجد الحل العام لهذه المعادلة.

2) أوجد الحل الخاص لها، والمحقق للشروط الابتدائية الآتية:

$$u\big|_{y=0}=-4x \quad , \quad u_y\big|_{y=0}=0$$

الحل: لدينا من المعادلة أنَّ: $A=x \ , \ 2B=0 \Rightarrow B=0 \ , \ C=-1$ وبالتالي فإنَّ:

$$B^2-AC=0-x(-1)=x>0$$

وبالتالي فالمعادلة المعطاة من النمط الزائدي، ولحلها نوجد المعادلة المميزة لها:

$$Ady^2-2Bdxdy+Cdx^2=0 \Rightarrow xdy^2-dx^2=0 \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{x}dy+dx\right)\left(\sqrt{x}dy-dx\right)=0 \Rightarrow \begin{cases}\left(dy+\frac{1}{\sqrt{x}}dx\right)=0 \Rightarrow y+2\sqrt{x}=c_1\\ \left(dy-\frac{1}{\sqrt{x}}dx\right)0 \Rightarrow y-2\sqrt{x}=c_2\end{cases}$$

وبأخذ $\xi=y+2\sqrt{x}\ ,\ \eta=y-2\sqrt{x}$ ، ثم بحساب المشتقات نجد أن:

$$\xi_x=\frac{1}{\sqrt{x}}\ ,\ \xi_{xx}=-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}\ ,\ \xi_y=1\ ,\ \xi_{yy}=0\ ,\ \xi_{xy}=0$$

$$\eta_x=-\frac{1}{\sqrt{x}}\ ,\ \eta_{xx}=\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}\ ,\ \eta_y=1\ ,\ \eta_{yy}=0\ ,\ \eta_{xy}=0$$

ولدينا:

$$u_{xx}=\xi_x^2u_{\xi\xi}+\eta_x^2u_{\eta\eta}+2\xi_x\eta_xu_{\xi\eta}+\xi_{xx}u_\xi+\eta_{xx}u_\eta \Rightarrow$$

$$\boxed{u_{xx}=\frac{1}{x}u_{\xi\xi}+\frac{1}{x}u_{\eta\eta}-\frac{2}{x}u_{\xi\eta}-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}u_\xi+\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}u_\eta}$$

$$u_{yy}=\xi_y^2u_{\xi\xi}+\eta_y^2u_{\eta\eta}+2\xi_y\eta_yu_{\xi\eta}+\xi_{yy}u_\xi+\eta_{yy}u_\eta \Rightarrow \boxed{u_{yy}=u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+2u_{\xi\eta}}$$

$$u_x=\xi_xu_\xi+\eta_xu_\eta \Rightarrow \boxed{u_x=\frac{1}{\sqrt{x}}u_\xi-\frac{1}{\sqrt{x}}u_\eta}$$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية نجد أن:

أمثال $u_{\xi\xi}$ هي: $x\left(\frac{1}{x}\right)-1(1)=1-1=0$

أمثال $u_{\eta\eta}$ هي: $x\left(\frac{1}{x}\right)-1(1)=1-1=0$

أمثال $u_{\xi\eta}$ هي: $x\left(-\frac{2}{x}\right)-(2)=-2-2=-4$

أمثال u_ξ هي:

$$x\left(-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}=0$$

أمثال u_η هي: $x\left(\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=0$

وبعد التعويض والاختصار نجد أن :

$$-4u_{\xi\eta}=-4 \quad\Rightarrow\quad \boxed{u_{\xi\eta}=1}$$

وهي المعادلة المطلوبة بالشكل النموذجي، ولنوجد حلها:

$$u_{\xi\eta}=1 \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial\xi}\left[u_\eta\right]=1$$

بتثبيت η والمكاملة بالنسبة لـ ξ نجد أنَّ: $u_\eta=\xi+\psi_1(\eta)$

وبتثبيت ξ والمكاملة بالنسبة لـ η نجد أنَّ:

$$u=\xi\eta+\int\psi_1(\eta)d\eta+\varphi(\xi) \;\Rightarrow\; \boxed{u(\xi,\eta)=\xi\eta+\varphi(\xi)+\psi(\eta)}$$

وبالعودة للمتحولات القديمة $\xi=y+2\sqrt{x}\;,\;\eta=y-2\sqrt{x}$ نجد أن الحل العام للمعادلة المطلوبة:

$$u(x,y)=\left(y+2\sqrt{x}\right)\left(y-2\sqrt{x}\right)+\varphi\left(y+2\sqrt{x}\right)+\psi\left(y-2\sqrt{x}\right) \;\Rightarrow$$

$$\boxed{u(x,y)=\left(y^2-4x\right)+\varphi\left(y+2\sqrt{x}\right)+\psi\left(y-2\sqrt{x}\right)}$$

ولإيجاد الحل الخاص المطلوب نطبق الشروط الابتدائية على الحل العام بالشكل:

نطبق الشرط الابتدائي الأول:

$$-4x=u\big|_{y=0}=-4x+\varphi\left(2\sqrt{x}\right)+\psi\left(-2\sqrt{x}\right) \;\Rightarrow\; \varphi\left(2\sqrt{x}\right)+\psi\left(-2\sqrt{x}\right)=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

نشتق الحل العام بالنسبة لـ y تمهيداً لتطبيق الشرط الابتدائي الثاني:

$$u(x,y)=2y+\varphi'\left(y+2\sqrt{x}\right)+\psi'\left(y-2\sqrt{x}\right)$$

وبتطبيق الشرط الابتدائي الثاني نجد أنَّ:

$$0=u_y\big|_{y=0}=\varphi'\left(2\sqrt{x}\right)+\psi'\left(-2\sqrt{x}\right) \;\Rightarrow\; \varphi'\left(2\sqrt{x}\right)+\psi'\left(-2\sqrt{x}\right)=0 \quad\cdots\cdots\cdots(**)$$

وباشتقاق العلاقة $(*)$ بالنسبة لـ y نجد أنَّ:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\varphi'\left(2\sqrt{x}\right)-\frac{1}{\sqrt{x}}\psi'\left(-2\sqrt{x}\right)=0 \;\Rightarrow\; \varphi'\left(2\sqrt{x}\right)-\psi'\left(-2\sqrt{x}\right)=0 \quad\cdots\cdots\cdots(*')$$

وبجمع العلاقة $(*')$ مع العلاقة $(**)$ نجد أنَّ:

$$2\varphi'\left(2\sqrt{x}\right)=0 \;\Rightarrow\; \varphi\left(2\sqrt{x}\right)=0 \;\Rightarrow\; \boxed{\varphi\left(y+2\sqrt{x}\right)=0}$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$0+\psi\left(-2\sqrt{x}\right)=0 \;\Rightarrow\; \psi\left(-2\sqrt{x}\right)=0 \;\Rightarrow\; \boxed{\psi\left(y-2\sqrt{x}\right)=0}$$

بالاستفادة مما سبق والتعويض في الحل العام نجد أنَّ الحل الخاص المطلوب هو :

$$\boxed{u(x,y)=\left(y^2-4x\right)}$$

لقد جاء نفس التمرين في دورة **الفصل الثاني للعام 2010 – 2011** بالشكل:

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية الآتية:

$$2xu_{xx} - 2u_{yy} + u_x = -8$$

في المنطقة $x > 0$، ثم أوجد الحل الخاص لها، والمحقق للشروط الابتدائية الآتية:

$$u\big|_{y=0} = -4x \quad , \quad u_y\big|_{y=0} = 4\sqrt{x}$$

الحل: نلاحظ أن الاختلاف فقط في الشروط الابتدائية وبالتالي فالحل العام يبقى نفسه بينما يختلف الحل الخاص:

نطبق الشرط الابتدائي الأول:

$$-4x = u\big|_{y=0} = -4x + \varphi\left(2\sqrt{x}\right) + \psi\left(-2\sqrt{x}\right) \Rightarrow \varphi\left(2\sqrt{x}\right) + \psi\left(-2\sqrt{x}\right) = 0 \cdots\cdots\cdots(*)$$

نشتق الحل العام بالنسبة لـ y تمهيداً لتطبيق الشرط الابتدائي الثاني:

$$u(x,y) = 2y + \varphi'\left(y + 2\sqrt{x}\right) + \psi'\left(y - 2\sqrt{x}\right)$$

وبتطبيق الشرط الابتدائي الثاني نجد أنَّ:

$$4\sqrt{x} = u_y\big|_{y=0} = \varphi'\left(2\sqrt{x}\right) + \psi'\left(-2\sqrt{x}\right) \Rightarrow \varphi'\left(2\sqrt{x}\right) + \psi'\left(-2\sqrt{x}\right) = 4\sqrt{x} \quad \cdots\cdots\cdots(**)$$

وباشتقاق العلاقة $(*)$ بالنسبة لـ y نجد أنَّ:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\varphi'\left(2\sqrt{x}\right) - \frac{1}{\sqrt{x}}\psi'\left(-2\sqrt{x}\right) = 0 \Rightarrow \varphi'\left(2\sqrt{x}\right) - \psi'\left(-2\sqrt{x}\right) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots(*')$$

وبجمع العلاقة $(*')$ مع العلاقة $(**)$ نجد أنَّ:

$$2\varphi'\left(2\sqrt{x}\right) = 4\sqrt{x} \Rightarrow \varphi'\left(2\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x} \Rightarrow \varphi'(t) = t \Rightarrow \varphi(t) = \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow$$

$$\varphi\left(2\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{x}\right)^2 \quad \boxed{\varphi\left(y + 2\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\left(y + 2\sqrt{x}\right)^2}$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$\frac{1}{2}\left(2\sqrt{x}\right)^2 + \psi\left(-2\sqrt{x}\right) = 0 \Rightarrow \psi\left(-2\sqrt{x}\right) = -\frac{1}{2}\left(2\sqrt{x}\right)^2 = -\frac{1}{2}\left(-2\sqrt{x}\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi\left(y - 2\sqrt{x}\right) = -\frac{1}{2}\left(y - 2\sqrt{x}\right)^2}$$

بالاستفادة مما سبق والتعويض في الحل العام نجد أنَّ الحل الخاص المطلوب هو:

$$u(x,y) = \left(y^2 - 4x\right) + \frac{1}{2}\left(y + 2\sqrt{x}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(y - 2\sqrt{x}\right)^2 =$$

$$= \left(y^2 - 4x\right) + \frac{1}{2}\left[\left(y + 2\sqrt{x}\right)^2 - \left(y - 2\sqrt{x}\right)^2\right] =$$

$$= \left(y^2 - 4x\right) + \frac{1}{2}\left[8y\sqrt{x}\right] = y^2 - 4x + 4y\sqrt{x} \Rightarrow \boxed{u(x,y) = y^2 - 4x + 4y\sqrt{x}}$$

❸(**الدورة التكميلية للعام 2007 – 2008**) لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الآتية:

$$y^2 u_{xx} + u_{xy} = 0$$

والمطلوب:

1) أوجد الحل العام لهذه المعادلة.

2) أوجد الحل الخاص لها، والمحقق للشروط الابتدائية الآتية:

$$u\big|_{y=2} = 3x + 8 \quad , \quad u\big|_{x=\frac{1}{3}y^3} = 2y^3$$

الحل: لدينا من المعادلة أنَّ: $A = y^2 \;,\; 2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2} \;,\; C = 0$ وبالتالي فإنَّ:

$$B^2 - AC = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(y^2\right)(0) = \frac{1}{4} > 0$$

وبالتالي فالمعادلة المعطاة من النمط الزائدي، ولحلها نوجد المعادلة المميزة لها:

$$Ady^2 - 2Bdxdy + Cdx^2 = 0 \;\Rightarrow\; y^2dy^2 - dxdy = 0 \;\Rightarrow$$

$$\left(y^2dy - dx\right)dy = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} y^2dy - dx = 0 \Rightarrow y^3 - 3x = c_1 \\ dy = 0 \Rightarrow y = c_2 \end{cases}$$

وبأخذ $\xi = y^3 - 3x \;,\; \eta = y$ ، ثم بحساب المشتقات نجد أن:

$$\xi_x = -3 \;,\; \xi_{xx} = 0 \;,\; \xi_y = 3y^2 \;,\; \xi_{yy} = 6y \;,\; \xi_{xy} = 0$$

$$\eta_x = 0 \;,\; \eta_{xx} = 0 \;,\; \eta_y = 1 \;,\; \eta_{yy} = 0 \;,\; \eta_{xy} = 0$$

ولدينا:

$$u_{xx} = \xi_x^2 u_{\xi\xi} + \eta_x^2 u_{\eta\eta} + 2\xi_x\eta_x u_{\xi\eta} + \xi_{xx}u_\xi + \eta_{xx}u_\eta \Rightarrow \boxed{u_{xx} = 9u_{\xi\xi}}$$

$$u_{xy} = \xi_x\xi_y u_{\xi\xi} + \eta_x\eta_y u_{\eta\eta} + \left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right)u_{\xi\eta} + \xi_{xy}u_\xi + \eta_{xy}u_\eta$$

$$\boxed{u_{xy} = -9y^2 u_{\xi\xi} - 3u_{\xi\eta}}$$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية نجد أن:

أمثال $u_{\xi\xi}$ هي : $y^2(9) + \left(-9y^2\right) = 9y^2 - 9y^2 = 0$

أمثال $u_{\xi\eta}$ هي: -3

وبعد التعويض والاختصار نجد أن : $\boxed{u_{\xi\eta} = 0}$

وهي المعادلة المطلوبة بالشكل النموذجي، ولنوجد حلها:

$$u_{\xi\eta} = 0 \;\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\eta}\left[u_\xi\right] = 0$$

بتثبيت ξ والمكاملة بالنسبة لـ η نجد أنَّ: $u_\xi = \varphi_1(\xi)$

وبتثبيت η والمكاملة بالنسبة لـ ξ نجد أنَّ:

$$u(\xi,\eta)=\int\varphi_1(\xi)d\xi+\psi(\eta)=\varphi(\xi)+\psi(\eta)\ \Rightarrow\ \boxed{u(\xi,\eta)=\varphi(\xi)+\psi(\eta)}$$

وبالعودة للمتحولات القديمة $\xi=y^3-3x\ ,\ \eta=y$ نجد أن الحل العام للمعادلة المطلوبة:

$$u(x,y)=\varphi\left(y^3-3x\right)+\psi(y)$$

ولإيجاد الحل الخاص المطلوب نطبق الشروط الابتدائية على الحل العام بالشكل:

نطبق الشرط الابتدائي الأول:

$$3x+8=u|_{y=2}=\varphi(8-3x)+\psi(2)\Rightarrow\ \varphi(8-3x)=3x+8-\psi(2)\ \Rightarrow$$

$$\varphi(8-3x)=-(8-3x)+16-\psi(2)\ \Rightarrow\ \boxed{\varphi\left(y^3-3x\right)=-\left(y^3-3x\right)+16-\psi(2)}\cdots\cdots\cdots(1')$$

وبتطبيق الشرط الابتدائي الثاني نجد أنَّ:

$$2y^3=u|_{x=\frac{1}{3}y^3}=\varphi\left(y^3-3\frac{1}{3}y^3\right)+\psi(y)\ \Rightarrow\ \boxed{\psi(y)=2y^3-\varphi(0)}\cdots\cdots\cdots(2')\ \Rightarrow$$

$$\psi(2)=16-\varphi(0)\ \Rightarrow\ \boxed{\psi(2)+\varphi(0)=16}\cdots\cdots\cdots(3')$$

بالاستفادة مما سبق والتعويض في الحل العام نجد أنَّ الحل الخاص المطلوب هو:

$$u(x,y)=3x-y^3+16-\psi(2)+2y^3-\varphi(0)=3x+y^3+16-\underbrace{\left(\psi(2)+\varphi(0)\right)}_{=16}\Rightarrow$$

$$\boxed{u(x,y)=y^3+3x}$$

❹ **(الدورة الاستثنائية للعام 2009 – 2010):** أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$2u_{xy}-e^{-x}u_{yy}=4x$$

ثم أوجد الحل الخاص والمحقق للشروط الابتدائية الآتية:

$$u|_{y=x}=x^5\cos x\quad ,\quad u_y|_{y=x}=x^2+1$$

الحـل: لدينا من المعادلة أنَّ: $A=0\ ,\ 2B=2\Rightarrow B=1\ ,\ C=-e^{-x}$ وبالتالي فإنَّ:

$$B^2-AC=(1)^2-(0)\left(-e^{-x}\right)=1>0$$

وبالتالي فالمعادلة المعطاة من النمط الزائدي، ولحلها نوجد المعادلة المميزة لها:

$$Ady^2-2Bdxdy+Cdx^2=0\ \Rightarrow\ -2dxdy-e^{-x}dx^2=0\ \Rightarrow 2dxdy+e^{-x}dx^2=0$$

$$dx\left(2dy+e^{-x}dx\right)dy=0\quad\Rightarrow\begin{cases}dx=0\Rightarrow x=c_1\\ 2dy+e^{-x}dx=0\Rightarrow 2y-e^{-x}=c_2\end{cases}$$

وبأخذ $\xi=x\ ,\ \eta=2y-e^{-x}$ ، ثم بحساب المشتقات نجد أن:

$$\xi_x=1\ ,\ \xi_{xx}=0\ ,\ \xi_y=0\ ,\ \xi_{yy}=0\ ,\ \xi_{xy}=0$$

$$\eta_x=e^{-x}\ ,\ \eta_{xx}=-e^{-x}\ ,\ \eta_y=2\ ,\ \eta_{yy}=0\ ,\ \eta_{xy}=0$$

ولدينا:

$$u_{xy} = \xi_x \xi_y u_{\xi\xi} + \eta_x \eta_y u_{\eta\eta} + \left(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x\right) u_{\xi\eta} + \xi_{xy} u_{\xi} + \eta_{xy} u_{\eta}$$

$$\boxed{u_{xy} = 2e^{-x} u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\eta}}$$

$$u_{yy} = \xi_y^2 u_{\xi\xi} + \eta_y^2 u_{\eta\eta} + 2\xi_y \eta_y u_{\xi\eta} + \xi_{yy} u_{\xi} + \eta_{yy} u_{\eta} \Rightarrow \boxed{u_{yy} = 4u_{\eta\eta}}$$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية نجد أن:

أمثال $u_{\eta\eta}$ هي : $2\left(2e^{-x}\right) - e^{-x}\left(4\right) = 4e^{-x} - 4e^{-x} = 0$

أمثال $u_{\xi\eta}$ هي: $2\left(2\right) = 4$

وبعد التعويض والاختصار نجد أن :

$$4u_{\xi\eta} = 4x \Rightarrow 4u_{\xi\eta} = 4\xi \;;\; x = \xi \Rightarrow u_{\xi\eta} = \xi$$

وهي المعادلة المطلوبة بالشكل النموذجي، ولنوجد حلها:

$$u_{\xi\eta} = \xi \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\eta}\left[u_{\xi}\right] = \xi$$

بتثبيت ξ والمكاملة بالنسبة لـ η نجد أنَّ: $u_{\xi} = \xi\eta + \varphi_1\left(\xi\right)$

وبتثبيت η والمكاملة بالنسبة لـ ξ نجد أنَّ:

$$u\left(\xi,\eta\right) = \frac{1}{2}\xi^2\eta + \int \varphi_1\left(\xi\right) d\xi + \psi\left(\eta\right) = \frac{1}{2}\xi^2\eta + \varphi\left(\xi\right) + \psi\left(\eta\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{u\left(\xi,\eta\right) = \frac{1}{2}\xi^2\eta + \varphi\left(\xi\right) + \psi\left(\eta\right)}$$

وبالعودة للمتحولات القديمة $\xi = x \;,\; \eta = 2y - e^{-x}$ نجد أن الحل العام للمعادلة المطلوبة:

$$u\left(x,y\right) = \frac{1}{2}x^2\left(2y - e^{-x}\right) + \varphi\left(x\right) + \psi\left(2y - e^{-x}\right)$$

ولإيجاد الحل الخاص المطلوب نطبق الشروط الابتدائية على الحل العام بالشكل:

نطبق الشرط الابتدائي الأول:

$$x^5\cos x = u\big|_{y=x} = \frac{1}{2}x^2\left(2x - e^{-x}\right) + \varphi\left(x\right) + \psi\left(2x - e^{-x}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\varphi\left(x\right) + \psi\left(2x - e^{-x}\right) = x^5\cos x - x^3 + \frac{1}{2}x^2 e^{-x}} \cdots\cdots\cdots(1')$$

نشتق الحل العام بالنسبة لـ y تمهيداً لتطبيق الشرط الابتدائي الثاني:

$$u_y = x^2 + 2\psi'\left(2y - e^{-x}\right)$$

وبتطبيق الشرط الابتدائي الثاني نجد أنَّ:

$$x^2 + 1 = u_y\big|_{y=x} = x^2 + 2\psi'\left(2x - e^{-x}\right) \Rightarrow 2\psi'\left(2x - e^{-x}\right) = 1 \Rightarrow \psi'\left(2x - e^{-x}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\psi'(t)=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\psi(t)=\frac{1}{2}t} \Rightarrow \begin{cases}\psi\left(2x-e^{-x}\right)=\frac{1}{2}\left(2x-e^{-x}\right)=x-\frac{1}{2}e^{-x}\\ \psi\left(2y-e^{-x}\right)=\frac{1}{2}\left(2y-e^{-x}\right)=y-\frac{1}{2}e^{-x}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{\psi\left(2x-e^{-x}\right)=x-\frac{1}{2}e^{-x}}\cdots\cdots\cdots(2') \quad , \quad \boxed{\psi\left(2y-e^{-x}\right)=y-\frac{1}{2}e^{-x}}\cdots\cdots\cdots(*)$$

وبتعويض العلاقة $(2')$ في العلاقة $(1')$ نجد أنَّ:

$$\varphi(x)+x-\frac{1}{2}e^{-x}=x^5\cos x-x^3+\frac{1}{2}x^2e^{-x} \Rightarrow \varphi(x)=x^5\cos x-x^3+\frac{1}{2}x^2e^{-x}-x+\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$\boxed{\varphi(x)=x^5\cos x-x^3+\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)e^{-x}-x} \quad \cdots\cdots\cdots(**)$$

وبتعويض العلاقتين $(*)$ و $(**)$ في الحل العام نجد أنَّ الحل الخاص المطلوب هو:

$$u(x,y)=\frac{1}{2}x^2\left(2y-e^{-x}\right)+x^5\cos x-x^3+\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)e^{-x}-x+\left(y-\frac{1}{2}e^{-x}\right) \Rightarrow$$

$$=x^2\left(y-\frac{1}{2}e^{-x}\right)+x^5\cos x-x^3+\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)e^{-x}-x+\left(y-\frac{1}{2}e^{-x}\right) \Rightarrow$$

$$=\left(y-\frac{1}{2}e^{-x}\right)\left(x^2+1\right)+x^5\cos x-x^3+\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)e^{-x}-x \Rightarrow$$

$$=\left(x^2+1\right)\left(y-\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-x}\right)+x^5\cos x-x\left(x^2+1\right) \Rightarrow$$

$$=\left(x^2+1\right)y+x^5\cos x-x\left(x^2+1\right) \Rightarrow \boxed{u(x,y)=(y-x)\left(x^2+1\right)+x^5\cos x}$$

❺**(الفصل الثاني للعام 2005 – 2006)** أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$(x+y)u_{xy}+u_x=2(x+y)$$

ثم أوجد الحل الخاص والمحقق للشروط الابتدائية $(x>0\ ,\ y<\infty)$:

$$u\big|_{y=x}=x^2 \quad , \quad u_x\big|_{y=x}=2x$$

الحـل: إن المعادلة المعطاة مكتوبة بالشكل النموذجي ، وتكتب بالشكل:

$$u_{xy}+\frac{1}{(x+y)}u_x=2$$

لنجري التحويل:

$$u_x=v \Rightarrow u_{xy}=v_y$$

وبالتالي فإن المعادلة الأخيرة تصبح بالشكل:

$$v_y+\frac{1}{(x+y)}v=2$$

بتثبيت x نحصل على معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى بالدالة x والمتحول المستقل y ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu = e^{\int \frac{1}{(x+y)}dy} = e^{\ln(x+y)} = (x+y)$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(x+y)v\right] = 2(x+y)$$

وبمكاملة الطرفين بالنسبة لـ y علماً أن x ثابت نجد أنَّ:

$$(x+y)v = (x+y)^2 + \varphi(x) \Rightarrow v = (x+y) + \frac{1}{(x+y)}\varphi(x)$$

وبالعدة للتحويل $u_x = v$ نجد أن المعادلة الأخيرة تصبح بالشكل:

$$u_x = (x+y) + \frac{1}{(x+y)}\varphi(x) \cdots\cdots\cdots(*)$$

وبتثبيت y والمكاملة بالنسبة لـ x نجد أنَّ:

$$\boxed{u(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)^2 + \int_0^x \frac{1}{(\xi+y)}\varphi(\xi)d\xi + \psi(y)}$$

ولإيجاد الحل الخاص المطلوب نطبق الشروط الابتدائية على الحل العام بالشكل:

نطبق الشرط الابتدائي الأول:

$$x^2 = u|_{y=x}\ 2x^2 + \int_0^x \frac{1}{(\xi+x)}\varphi(\xi)d\xi + \psi(x) \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_0^x \frac{1}{(\xi+x)}\varphi(\xi)d\xi + \psi(x) = -x^2} \cdots\cdots\cdots(**)$$

ومن العلاقة $(*)$ لدينا:

$$u_x = (x+y) + \frac{1}{(x+y)}\varphi(x)$$

وبتطبيق الشرط الابتدائي الثاني نجد أنَّ:

$$2x = u_x|_{y=x} = 2x + \frac{1}{2x}\varphi(x) \Rightarrow \frac{1}{2x}\varphi(x) = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi(x) = 0} \cdots\cdots\cdots(1')$$

وبالتعويض في العلاقة $(**)$ نجد أنَّ: $\psi(x) = -x^2 \Rightarrow \boxed{\psi(y) = -y^2} \cdots\cdots\cdots(2')$

وبتعويض العلاقتين $(1')$ و $(2')$ في عبارة الحل العام نجد أن الحل الخاص المطلوب هو:

$$\boxed{u(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)^2 - y^2}$$

❻**(الفصل الثاني للعام 2011 – 2012)** لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الآتية:

$$x\,u_{xy}-yu_{yy}-u_y=2x^3$$

والمطلوب:

1) أثبت أنَّ المعادلة المعطاة من النمط الزائدي ، ثمَّ أوجد الحل العام لها.

2) أوجد الحل الخاص لها، والمحقق للشروط الابتدائية الآتية:

$$u\big|_{y=x}=\sin x\quad,\quad u_x\big|_{y=x}=\cos x$$

الحـل: لدينا من المعادلة أنَّ: $C=-y\ ,\ 2B=x\Rightarrow B=\dfrac{x}{2}\ ,\ A=0$ وبالتالي فإنَّ:

$$B^2-AC=\left(\frac{x}{2}\right)^2-(0)(-y)=\frac{1}{4}x^2>0$$

وبالتالي فالمعادلة المعطاة من النمط الزائدي، ولحلها نوجد المعادلة المميزة لها:

$$Ady^2-2Bdxdy+Cdx^2=0\ \Rightarrow\ -xdxdy-ydx^2=0\ \Rightarrow x\,dxdy+ydx^2=0$$

$$dx\,(x\,dy+ydx)dy=0\quad\Rightarrow\begin{cases}dx=0\Rightarrow x=c_1\\ x\,dy+ydx=0\Rightarrow xy=c_2\end{cases}$$

وبأخذ $\xi=x\ ,\ \eta=xy$ ، ثم بحساب المشتقات نجد أن:

$$\xi_x=1\ ,\ \xi_{xx}=0\ ,\ \xi_y=0\ ,\ \xi_{yy}=0\ ,\ \xi_{xy}=0$$

$$\eta_x=y\ ,\ \eta_{xx}=0\ ,\ \eta_y=x\ ,\ \eta_{yy}=0\ ,\ \eta_{xy}=1$$

ولدينا:

$$u_{xy}=\xi_x\xi_y u_{\xi\xi}+\eta_x\eta_y u_{\eta\eta}+(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)u_{\xi\eta}+\xi_{xy}u_\xi+\eta_{xy}u_\eta$$

$$\boxed{u_{xy}=xyu_{\eta\eta}+x\,u_{\xi\eta}+u_\eta}$$

$$u_{yy}=\xi_y^2u_{\xi\xi}+\eta_y^2u_{\eta\eta}+2\xi_y\eta_y u_{\xi\eta}+\xi_{yy}u_\xi+\eta_{yy}u_\eta\ \Rightarrow\boxed{u_{yy}=x^2u_{\eta\eta}}$$

$$u_y=\xi_y u_\xi+\eta_y u_\eta\quad\Rightarrow\boxed{u_y=xu_\eta}$$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية نجد أن:

أمثال $u_{\eta\eta}$ هي : $x\,(xy)-y\,(x^2)=x^2y-x^2y=0$

أمثال $u_{\xi\eta}$ هي: $x\,(x)=x^2$

أمثال u_η هي: $x\,(1)+(-1)(x)=x-x=0$

وبعد التعويض والاختصار نجد أن : $x^2u_{\xi\eta}=2x^3\ \Rightarrow u_{\xi\eta}=2x\ \Rightarrow\ \boxed{u_{\xi\eta}=2\xi}$

وهي المعادلة المطلوبة بالشكل النموذجي، ولنوجد حلها:

$$u_{\xi\eta}=2\xi\ \Rightarrow\ \frac{\partial}{\partial\eta}\left[u_\xi\right]=2\xi$$

بتثبيت ξ والمكاملة بالنسبة لـ η نجد أنَّ: $u_{\xi}=2\xi\eta+\varphi_1(\xi)$

وبتثبيت η والمكاملة بالنسبة لـ ξ نجد أنَّ:

$$u(\xi,\eta)=\xi^2\eta+\int\varphi_1(\xi)d\xi+\psi(\eta)=\xi^2\eta+\varphi(\xi)+\psi(\eta)\ \Rightarrow$$

$$\boxed{u(\xi,\eta)=\xi^2\eta+\varphi(\xi)+\psi(\eta)}$$

وبالعودة للمتحولات القديمة $\xi=x\ ,\ \eta=xy$ نجد أن الحل العام للمعادلة المطلوبة:

$$u(x,y)=x^2(xy)+\varphi(x)+\psi(xy)\ \Rightarrow\ \boxed{u(x,y)=x^3y+\varphi(x)+\psi(xy)}$$

ولإيجاد الحل الخاص المطلوب نطبق الشروط الابتدائية على الحل العام بالشكل:

نطبق الشرط الابتدائي الأول:

$$\sin x=u|_{y=x}=x^4+\varphi(x)+\psi(x^2)\Rightarrow\ \varphi(x)+\psi(x^2)=\sin x-x^4\ \cdots\cdots\cdots(1')$$

نشتق الحل العام بالنسبة لـ x تمهيداً لتطبيق الشرط الابتدائي الثاني:

$$u_x=3x^2y+\varphi'(x)+y\psi'(xy)$$

نطبق الشرط الابتدائي الثاني:

$$\cos x=u_x|_{y=x}=3x^3+\varphi'(x)+x\psi'(x^2)\Rightarrow\ \varphi'(x)+x\psi'(x^2)=\cos x-3x^3\ \cdots\cdots\cdots(2')$$

نشتق العلاقة $(1')$ بالنسبة لـ x فنجد أنَّ: $\varphi'(x)+2x\psi'(x^2)=\cos x-4x^3\ \cdots\cdots\cdots(3')$

وبطرح العلاقة $(2')$ من العلاقة $(3')$ نجد أنَّ:

$$x\psi'(x^2)=-x^3\ \Rightarrow\psi'(x^2)=-x^2\ \Rightarrow\ \psi'(t)=-t\ \Rightarrow$$

$$\boxed{\psi(t)=-\frac{1}{2}t^2}\Rightarrow\begin{cases}\psi(x^2)=-\frac{1}{2}(x^2)^2=-\frac{1}{2}x^4\Rightarrow\boxed{\psi(x^2)=-\frac{1}{2}x^4}\cdots\cdots\cdots(*)\\ \psi(xy)=-\frac{1}{2}(xy)^2=-\frac{1}{2}x^2y^2\Rightarrow\boxed{\psi(xy)=-\frac{1}{2}x^2y^2}\cdots\cdots\cdots(*')\end{cases}$$

وبتعويض العلاقة $(*)$ في العلاقة $(1')$ نجد أنَّ:

$$\varphi(x)-\frac{1}{2}x^4=\sin x-x^4\ \Rightarrow\varphi(x)=\sin x-x^4+\frac{1}{2}x^4=\sin x-\frac{1}{2}x^4\Rightarrow$$

$$\boxed{\varphi(x)=\sin x-\frac{1}{2}x^4}\cdots\cdots\cdots(**)$$

وبتعويض العلاقتين $(*')$ ، $(**)$ في عبارة الحل العام نجد أن الحل الخاص المطلوب هو:

$$u(x,y)=x^3y+\sin x-\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2y^2=\sin x-\frac{1}{2}x^2\left(x^2-2xy+y^2\right)$$

$$=\sin x-\frac{1}{2}x^2(x-y)^2=\sin x-\frac{1}{2}\left[x(x-y)\right]^2\Rightarrow\boxed{u(x,y)=\sin x-\frac{1}{2}\left(x^2-xy\right)^2}$$

❼ **تمرين إضافي مهم:** أوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$u_{xx}+3u_{xy}-4u_{yy}-u_x+u_y=0 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية:
$$u\big|_{y=4x}=5x+e^x \quad , \; u\big|_{y=-x}=1 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

الحـل: لدينا من المعادلة أنَّ: $A=1 \;,\; 2B=3 \Rightarrow B=\dfrac{3}{2} \;,\; C=-4$ وبالتالي فإنَّ:

$$B^2-AC=\left(\frac{3}{2}\right)^2-(1)(-4)=\frac{9}{4}+4=\frac{25}{4}>0$$

وبالتالي فالمعادلة المعطاة من النمط الزائدي، ولحلها نوجد المعادلة المميزة لها:

$$Ady^2-2Bdxdy+Cdx^2=0 \;\Rightarrow\; dy^2-3dxdy-4dx^2=0 \;\Rightarrow$$

$$(dy+dx)(dy-4dx)=0 \;\Rightarrow \begin{cases} dy+dx=0 \Rightarrow y+x=c_1 \\ dy-4dx=0 \Rightarrow y-4x=c_2 \end{cases}$$

وبأخذ $\xi=y+x \;,\; \eta=y-4x$ ، ثم بحساب المشتقات نجد أن:

$$\xi_x=1 \;,\; \xi_{xx}=0 \;,\; \xi_y=1 \;,\; \xi_{yy}=0 \;,\; \xi_{xy}=0$$
$$\eta_x=-4 \;,\; \eta_{xx}=0 \;,\; \eta_y=1 \;,\; \eta_{yy}=0 \;,\; \eta_{xy}=0$$

ولدينا:

$$u_{xx}=\xi_x^2u_{\xi\xi}+\eta_x^2u_{\eta\eta}+2\xi_x\eta_xu_{\xi\eta}+\xi_{xx}u_\xi+\eta_{xx}u_\eta \Rightarrow \boxed{u_{xx}=u_{\xi\xi}+16u_{\eta\eta}-8u_{\xi\eta}}$$

$$u_{xy}=\xi_x\xi_yu_{\xi\xi}+\eta_x\eta_yu_{\eta\eta}+(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)u_{\xi\eta}+\xi_{xy}u_\xi+\eta_{xy}u_\eta \Rightarrow \boxed{u_{xy}=u_{\xi\xi}-4u_{\eta\eta}-3u_{\xi\eta}}$$

$$u_{yy}=\xi_y^2u_{\xi\xi}+\eta_y^2u_{\eta\eta}+2\xi_y\eta_yu_{\xi\eta}+\xi_{yy}u_\xi+\eta_{yy}u_\eta \Rightarrow \boxed{u_{yy}=u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+2u_{\xi\eta}}$$

$$u_x=\xi_xu_\xi+\eta_xu_\eta \Rightarrow \boxed{u_x=u_\xi-4u_\eta} \quad , \quad u_y=\xi_yu_\xi+\eta_yu_\eta \Rightarrow \boxed{u_y=u_\xi+u_\eta}$$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية نجد أن:

أمثال $u_{\xi\xi}$ هي : $1(1)+3(1)-4(1)=0$

أمثال $u_{\eta\eta}$ هي: $1(16)+3(-4)-4(1)=16-12-4=0$

أمثال $u_{\xi\eta}$ هي: $1(-8)+3(-3)-4(2)=-8-9-8=-25$

أمثال u_ξ هي: $-1(1)+1(1)=0$

أمثال u_η هي: $-1(-4)+1(1)=5$

وبعد التعويض والاختصار نجد أن : $-25u_{\xi\eta}+5u_\eta=0 \;\Rightarrow\; \boxed{u_{\xi\eta}-\dfrac{1}{5}u_\eta=0}$

وهي المعادلة المطلوبة بالشكل النموذجي، ولنوجد حلها:

$$u_{\xi\eta}-\frac{1}{5}u_\eta=0 \;\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\eta}\left[u_\xi-\frac{1}{5}u\right]=0$$

بتثبيت ξ والمكاملة بالنسبة لـ η نجد أنَّ: $u_{\xi}-\frac{1}{5}u=\varphi_1(\xi)$

وبتثبيت η نحصل على معادلة تفاضلية بالدالة u والمتحول المستقل ξ ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu=e^{\int\left(-\frac{1}{5}\right)d\xi}=e^{-\frac{\xi}{5}}$$

وبضرب المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[e^{-\frac{\xi}{5}}u\right]=e^{-\frac{\xi}{5}}\varphi_1(\xi)=\varphi_2(\xi)\ \Rightarrow e^{-\frac{\xi}{5}}u=\int\varphi_2(\xi)d\xi+\psi(\eta)=\varphi(\xi)+\psi(\eta)\ \Rightarrow$$

$$\boxed{u(\xi,\eta)=e^{\frac{\xi}{5}}\left[\varphi(\xi)+\psi(\eta)\right]}$$

وبالعودة للمتحولات القديمة $\xi=y+x\ ,\ \eta=y-4x$ نجد أن الحل العام للمعادلة المطلوبة:

$$u(x,y)=e^{\frac{1}{5}(y+x)}\left[\varphi(y+x)+\psi(y-4x)\right]$$

ولإيجاد الحل الخاص المطلوب نطبق الشروط الابتدائية على الحل العام بالشكل:

نطبق الشرط الابتدائي الأول:

$$5x+e^{x}=u|_{y=4x}=e^{\frac{1}{5}(4x+x)}\left[\varphi(4x+x)+\psi(4x-4x)\right]\Rightarrow$$

$$5x+e^{x}=e^{x}\left[\varphi(5x)+\psi(0)\right]\ \Rightarrow \boxed{\varphi(5x)=1+5x\,e^{-x}-\psi(0)}\ \cdots\cdots\cdots(*)\Rightarrow$$

$$\varphi(t)=1+t\,e^{-\frac{t}{5}}-\psi(0)\ \Rightarrow\varphi(y+x)=1+(y+x)e^{-\frac{1}{5}(y+x)}-\psi(0)\cdots\cdots\cdots(*')$$

نطبق الشرط الابتدائي الثاني:

$$1=u|_{y=-x}=e^{\frac{1}{5}(-x+x)}\left[\varphi(-x+x)+\psi(-x-4x)\right]\ \Rightarrow$$

$$+\psi(-5x)=1\ \Rightarrow\psi(-5x)=1-\varphi(0)$$

$$\psi(t)=1-\varphi(0)\ \Rightarrow\begin{cases}\psi(0)=1-\varphi(0)\Rightarrow\boxed{\psi(0)+\varphi(0)=1}\cdots\cdots\cdots(**)\\ \psi(y-4x)=1-\varphi(0)\ \cdots\cdots\cdots(*'*')\end{cases}$$

بالاستفادة من العلاقتين $(*'),(*'*')$ما سبق والتعويض في الحل العام نجد أنَّ الحل الخاص المطلوب هو:

$$u(x,y)=e^{\frac{1}{5}(y+x)}\left[1+(y+x)e^{-\frac{1}{5}(y+x)}-\psi(0)+1-\varphi(0)\right]$$

$$=e^{\frac{1}{5}(y+x)}\left[2+(y+x)e^{-\frac{1}{5}(y+x)}-\underbrace{\left[\varphi(0)+\psi(0)\right]}_{=1}\right]$$

$$=e^{\frac{1}{5}(y+x)}\left[2+(y+x)e^{-\frac{1}{5}(y+x)}-1\right]=e^{\frac{1}{5}(y+x)}\left[1+(y+x)e^{-\frac{1}{5}(y+x)}\right]\Rightarrow$$

$$\boxed{u(x,y)=(y+x)+e^{\frac{1}{5}(y+x)}}$$

تمرينات غير محلولة (الفصل الثاني):

❶(الفصل الثاني للعام 2013 – 2014) أوجد حل المعادلة:

$$u_{tt}=4u_{xx}+t\sin(2x)-16\sin(4t),\ (0<x<\pi\ ,\ t>0)\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية: $u(x,0)=\sin(2x)\ ,\ u_t(x,0)=4\ \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية: $u(0,t)=\sin(4t)\ ,\ u(1,t)=\sin(4t)\ \cdots\cdots\cdots(3)$

الحـل: إن المسألة الحدية المعطاة هي مسألة حدية غير متجانسة بشروط حدية غير صفرية وفيها:

$$a=2\ ,\ \ell=\pi\ ,\ f(x,t)=t\sin(2x)-16\sin(4t)$$

$$\varphi(x)=\sin 2x\ ,\ \psi(x)=4\quad ,\quad \mu_1(t)=\sin 4t\ ,\ \mu_2(t)=\sin 4t$$

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=U(x,t)+v(x,t)\ \cdots\cdots\cdots(4)$$

علماً أنَّ:

$$U(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{\ell}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]=\sin 4t+\frac{x}{\pi}\left[\sin 4t-\sin 4t\right]=\sin 4t\ \Rightarrow$$

$$\boxed{U(x,t)=\sin 4t}\ \cdots\cdots\cdots(5)$$

$$U_t(x,t)=4\cos 4t\ ,\ U_{tt}(x,t)=-16\sin 4t\ ,\ U_{xx}(x,t)=0$$

$$U(x,0)=0\ ,\ U_t(x,0)=4$$

أما $v(x,t)$ فهي حل للمسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=a^2v_{xx}+\overline{f}(x,t)$$

مع الشروط الابتدائية: $v(x,0)=\overline{\varphi}(x)\ ,\ v_t(x,0)=\overline{\psi}(x)$

والشروط الحدية الصفرية: $v(0,t)=0\quad ,\quad v(\ell,t)=0$

علماً أنَّ:

$$\overline{f}(x,t)=f(x,t)-\left(U_{tt}-a^2U_{xx}\right)=$$

$$=t\sin(2x)-16\sin(4t)-\left[-16\sin(4t)-4(0)\right]=t\sin(2x)$$

$$\overline{\varphi}(x)=\varphi(x)-U(x,0)=\sin 2x-0=\sin 2x$$

$$\overline{\psi}(x)=\psi(x)-U_t(x,0)=4-4=0$$

وبالتالي فإنَّ $v\left(x,t\right)$ هي حل للمسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=4v_{xx}+t\sin\left(2x\right)\quad\cdots\cdots\cdots\left(1'\right)$$

مع الشروط الابتدائية: $v\left(x,0\right)=\sin 2x\ \ ,\ \ v_t\left(x,0\right)=0\quad\cdots\cdots\cdots\left(2'\right)$

والشروط الحدية الصفرية: $v\left(0,t\right)=0\quad,\quad v\left(\pi,t\right)=0\quad\cdots\cdots\cdots\left(3'\right)$

وحل هذه المسألة الحدية الجديدة يعطى بالدستور التالي:

$$v\left(x,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n\left(t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\cdots\cdots\cdots\left(4'\right)$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\varphi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi\quad,\quad D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\overline{\psi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

$$T_n\left(t\right)=\frac{\ell}{n\pi a}\int_0^{t}\overline{f_n}\left(\tau\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}a\left(t-\tau\right)\right)d\tau$$

$$\overline{f_n}\left(t\right)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{f}\left(\xi,t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

بما أن $\overline{\psi}\left(x\right)=0$ فإنَّ $\overline{\psi}\left(\xi\right)=0$ وبالتالي فإنَّ $D_n=0$.

وكما أن:

$$C_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(2\xi\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\xi\right)d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(2\xi\right)\sin\left(n\xi\right)d\xi=\frac{2}{\pi}\begin{cases}\frac{\pi}{2}\ ;\ n=2\\ 0\ ;\ n\neq 2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\boxed{C_n=\begin{cases}1\ ;\ n=2\\ 0\ ;\ n\neq 2\end{cases}}$$

وأيضاً:

$$\overline{f_n}\left(t\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t\sin\left(2\xi\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\xi\right)d\xi=\frac{2}{\pi}t\int_0^{\pi}\sin\left(2\xi\right)\sin\left(n\xi\right)d\xi=$$

$$=\frac{2}{\pi}t\begin{cases}\frac{\pi}{2}\ ;\ n=2\\ 0\ ;\ n\neq 2\end{cases}\Rightarrow\quad\boxed{\overline{f_n}\left(t\right)=\begin{cases}t\ ;\ n=2\\ 0\ ;\ n\neq 2\end{cases}}$$

وبما أنَّ $f_n\left(t\right)=0$ من أجل $n\neq 2$ فإنَّ $T_n\left(t\right)=0$ من أجل $n\neq 2$ وبالتالي فإنَّ:

$$T_2\left(t\right)=\frac{\pi}{(2)\pi(2)}\int_0^{t}\sin\left[\frac{(2)\pi}{\pi}(2)\left(t-\tau\right)\right]\tau d\tau=\frac{1}{4}\int_0^{t}\sin\left[4\left(t-\tau\right)\right]\tau d\tau=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\tau\cos\left[4(t-\tau)\right]\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}-\frac{1}{4}\int_0^t\cos\left[4(t-\tau)\right]d\tau\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}t+\frac{1}{16}\sin\left[4(t-\tau)\right]\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}t-\frac{1}{16}\sin(4t)\right]=\frac{1}{64}\left[4t-\sin(4t)\right]\Rightarrow$$

$$\boxed{T_2(t)=\frac{1}{64}\left[4t-\sin(4t)\right]}$$

وبالتالي نجد أنَّ:

$$T_n(t)=\begin{cases}\frac{1}{64}\left[4t-\sin(4t)\right] \ ; \ n=2\\ 0 \ ; \ n\neq 2\end{cases}$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في عبارة الحل للمسألة الجديدة $(4')$ نجد أنَّ:

$$v(x,t)=\cos 4t\sin 2x+\frac{1}{64}\left[4t-\sin(4t)\right]\sin 2x=$$

$$=\left[\cos 4t+\frac{1}{64}\left[4t-\sin(4t)\right]\right]\sin 2x \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{v(x,t)=\left[\cos 4t+\frac{1}{64}\left[4t-\sin(4t)\right]\right]\sin 2x} \quad \cdots\cdots\cdots(5')$$

بتعويض العلاقتين $(5')$ و (5) في العلاقة (4) نحصل على عبارة الحل العام للمسألة الحدية المعطاة:

$$\boxed{u(x,t)=\sin 4t+\left[\cos 4t+\frac{1}{64}\left[4t-\sin(4t)\right]\right]\sin 2x}$$

❷**(الفصل الأول للعام 2006 – 2007)** أوجد حل المعادلة:

$$u_{tt}=4u_{xx}+4xt\ ,\ (0<x<1\ ,\ t>0)\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية: $u(x,0)=x \ ,\ u_t(x,0)=-1 \ \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية: $u(0,t)=t \ ,\ u(1,t)=1+t \ \cdots\cdots\cdots(3)$

الحــل:

إن المسألة الحدية المعطاة هي مسألة غير متجانسة بشروط حدية غير صفرية وفيها:

$$a=2\ ,\ \ell=1\ ,\ f(x,t)=4xt\ ,\ \varphi(x)=x\ ,\ \psi(x)=-1\ ,\ \mu_1(t)=t\ ,\ \mu_2(t)=1+t$$

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=U(x,t)+v(x,t)\ \cdots\cdots\cdots(4)$$

حيث أنَّ:

$$U(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{\ell}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]=t+\frac{x}{1}\left[(1+t)-t\right]=x+t\Rightarrow$$

$$\boxed{U(x,t)=x+t}\quad\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$U_t(x,t)=1\ ,\ U_{tt}(x,t)=0\ ,\ U_{xx}(x,t)=0\quad ,U(x,0)=x\quad ,\ U_t(x,0)=1$$

أما $v(x,t)$ فهي حل للمسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=a^2v_{xx}+\overline{f}(x,t)$$

مع الشروط الابتدائية: $v(x,0)=\overline{\varphi}(x)\ ,\ v_t(x,0)=\overline{\psi}(x)$

والشروط الحدية الصفرية: $v(0,t)=0\quad ,\quad v(\ell,t)=0$

علماً أنَّ:

$$\overline{f}(x,t)=f(x,t)-\left(U_{tt}-a^2U_{xx}\right)=4xt-\left[0-4(0)\right]=4xt$$

$$\overline{\varphi}(x)=\varphi(x)-U(x,0)=x-x=0$$

$$\overline{\psi}(x)=\psi(x)-U_t(x,0)=-1-(1)=-2$$

وبالتالي فإنَّ $v(x,t)$ هي حل للمسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=4v_{xx}+4xt\quad\cdots\cdots\cdots(1')$$

مع الشروط الابتدائية: $v(x,0)=0\ ,\ v_t(x,0)=-2\quad\cdots\cdots\cdots(2')$

والشروط الحدية الصفرية: $v(0,t)=0\quad ,\quad v(1,t)=0\quad\cdots\cdots\cdots(3')$

وحل هذه المسألة الحدية الجديدة يعطى بالدستور التالي:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\cdots\cdots\cdots(4')$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\varphi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi\quad ,\quad D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\overline{\psi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

$$T_n(t)=\frac{\ell}{n\pi a}\int_0^{t}\overline{f_n}(\tau)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}a(t-\tau)\right)d\tau$$

$$\overline{f_n}(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{f}(\xi,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

وبما أنَّ $\overline{\varphi}(x)=0$ فإنَّ $\overline{\varphi}(\xi)=0$ وبالتالي فإنَّ $C_n=0$، وكما أنَّ:

$$D_n=\frac{2}{n\pi(2)}\int_0^1(-2)\sin\left(\frac{n\pi}{1}\xi\right)d\xi=\frac{-2}{n\pi}\int_0^1\sin(n\pi\xi)d\xi=\frac{2}{n^2\pi^2}\cos(n\pi\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=1}=$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]\ \Rightarrow\ D_n=\frac{2}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]$$

$$\overline{f_n}(t)=\frac{2}{1}\int_0^1 4\xi t\ \sin\left(\frac{n\pi}{1}\xi\right)d\xi=8t\int_0^{\pi}\xi\sin(n\pi\xi)d\xi=8t\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\right]$$

$$T_n(t)=\frac{1}{n\pi(2)}\int_0^t\sin\left[\frac{n\pi}{1}(2)(t-\tau)\right]\left(8\tau\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\right]\right)d\tau=$$

$$=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\int_0^t\tau\sin\left[2n\pi(t-\tau)\right]d\tau=$$

$$=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\left[\frac{1}{2n\pi}\tau\cos\left[2n\pi(t-\tau)\right]\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}-\frac{1}{2n\pi}\int_0^t\cos\left[2n\pi(t-\tau)\right]d\tau\right]$$

$$=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\left[\frac{t}{2n\pi}+\frac{1}{4n^2\pi^2}\sin\left[2n\pi(t-\tau)\right]\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}\right]$$

$$=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\left[\frac{t}{2n\pi}-\frac{1}{4n^2\pi^2}\sin(2n\pi t)\right]=\frac{(-1)^{n+1}}{n^4\pi^4}\left[2n\pi t-\sin(2n\pi t)\right]$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في عبارة الحل للمسألة الجديدة $(4')$ نجد أنَّ:

$$v(x,t)=\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[(-1)^n-1\right]\sin(2n\pi t)\sin(n\pi x)+$$

$$+\frac{1}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}\left[2n\pi t-\sin(2n\pi t)\right]\sin(n\pi x)\cdots\cdots\cdots(5')$$

بتعويض العلاقتين $(5')$ و (5) في العلاقة (4) نحصل على عبارة الحل العام للمسألة الحدية المعطاة:

$$u(x,t)=x+t+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[(-1)^n-1\right]\sin(2n\pi t)\sin(n\pi x)+$$

$$+\frac{1}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}\left[2n\pi t-\sin(2n\pi t)\right]\sin(n\pi x)$$

❸ **(الفصل الأول للعام 2014 – 2015)**: أوجد حل المعادلة:

$$u_{tt}=u_{xx}\quad,(0<x<1\ ,\ t>0)\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية: $u(x,0)=x+1\ ,\ u_t(x,0)=0\ \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية: $u(0,t)=t+1,\ u(1,t)=t^3+2\ ,t>0\ \cdots\cdots\cdots(3)$

الحــل: إن المسألة الحدية المعطاة هي مسألة متجانسة بشروط حدية غير صفرية وفيها:

$$a=1,\ \ell=1\ ,\ f(x,t)=0,\ \varphi(x)=x+1\ ,\ \psi(x)=0\ ,\ \mu_1(t)=t+1\ ,\ \mu_2(t)=t^3+2$$

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=U(x,t)+v(x,t)\ \cdots\cdots\cdots(4)$$

حيث أنَّ:

$$U(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{\ell}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]=t+1+\frac{x}{1}\left[\left(t^3+2\right)-(t+1)\right]=1+t+x\left(t^3-t+1\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{U(x,t)=1+t+x\left(t^3-t+1\right)}\ \cdots\cdots\cdots(5)$$

$$U_t(x,t)=1+x\left(3t^2-1\right)\Rightarrow\ U_{tt}(x,t)=6xt\ \ ,U_{xx}(x,t)=0$$

$$U(x,0)=x+1\ \ ,\ U_t(x,0)=1-x$$

أما $v(x,t)$ فهي حل للمسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=a^2v_{xx}+\overline{f}(x,t)$$

مع الشروط الابتدائية: $v(x,0)=\overline{\varphi}(x)\ ,\ v_t(x,0)=\overline{\psi}(x)$

والشروط الحدية الصفرية: $v(0,t)=0\ \ ,\ \ v(\ell,t)=0$

علماً أنَّ:

$$\overline{f}(x,t)=f(x,t)-\left(U_{tt}-a^2U_{xx}\right)=0-\left[6xt-1(0)\right]=-6xt$$

$$\overline{\varphi}(x)=\varphi(x)-U(x,0)=(x+1)-(x+1)=0$$

$$\overline{\psi}(x)=\psi(x)-U_t(x,0)=0-(1-x)=x-1$$

وبالتالي فإنَّ $v(x,t)$ هي حل للمسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=v_{xx}-6xt\ \cdots\cdots\cdots(1')$$

مع الشروط الابتدائية: $v(x,0)=0\ ,\ v_t(x,0)=x-1\ \cdots\cdots\cdots(2')$

والشروط الحدية الصفرية: $v(0,t)=0\ \ ,\ \ v(1,t)=0\ \cdots\cdots\cdots(3')$

وحل هذه المسألة الحدية الجديدة يعطى بالدستور التالي:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\cdots\cdots\cdots(4')$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\varphi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi\ \ ,\ \ D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\overline{\psi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

$$T_n(t)=\frac{\ell}{n\pi a}\int_0^t \overline{f_n}(\tau)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}a(t-\tau)\right)d\tau$$

$$\overline{f_n}(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^\ell \overline{f}(\xi,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

وبما أنَّ $\overline{\varphi}(x)=0$ فإنَّ $\overline{\varphi}(\xi)=0$ وبالتالي فإنَّ $C_n=0$، وكما أنَّ:

$$D_n=\frac{2}{n\pi(1)}\int_0^1(\xi-1)\sin\left(\frac{n\pi}{1}\xi\right)d\xi=\frac{2}{n\pi}\int_0^1(\xi-1)\sin(n\pi\xi)d\xi=$$

$$\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{1}{n\pi}(\xi-1)\cos(n\pi\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=1}+\frac{1}{n\pi}\underbrace{\int_0^1\cos(n\pi\xi)d\xi}_{=0}\right]=-\frac{2}{(n\pi)^2}\Rightarrow$$

$$\boxed{D_n=\frac{-2}{(n\pi)^2}}$$

وكما أنَّ:

$$\overline{f_n}(t)=\frac{2}{1}\int_0^1(-6\xi t)\sin\left(\frac{n\pi}{1}\xi\right)d\xi=-12t\int_0^\pi\xi\sin(n\pi\xi)d\xi=-12t\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\right]=\frac{12}{n\pi}t(-1)^n$$

وبالتالي فإنَّ:

$$T_n(t)=\frac{1}{n\pi(1)}\int_0^t\sin\left[\frac{n\pi}{1}(1)(t-\tau)\right]\left(12\tau\left[\frac{(-1)^n}{n\pi}\right]\right)d\tau$$

$$=12\left[\frac{(-1)^n}{(n\pi)^2}\right]\int_0^t\tau\sin[n\pi(t-\tau)]d\tau$$

$$=12\left[\frac{(-1)^n}{(n\pi)^2}\right]\left[\frac{1}{n\pi}\tau\cos[n\pi(t-\tau)]\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}-\frac{1}{n\pi}\int_0^t\cos[2n\pi(t-\tau)]d\tau\right]$$

$$=12\left[\frac{(-1)^n}{(n\pi)^2}\right]\left[\frac{t}{n\pi}+\frac{1}{(n\pi)^2}\sin[n\pi(t-\tau)]\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}\right]$$

$$=12\left[\frac{(-1)^n}{(n\pi)^2}\right]\left[\frac{t}{n\pi}-\frac{1}{(n\pi)^2}\sin(2n\pi t)\right]=12\left[\frac{(-1)^n}{(n\pi)^4}\right][n\pi t-\sin(n\pi t)]$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في عبارة الحل للمسألة الجديدة $(4')$ نجد أنَّ:

$$v(x,t)=-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin(n\pi t)\sin(n\pi x)+$$

$$+\frac{12}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\left[n\pi t-\sin(n\pi t)\right]\sin(n\pi x)\cdots\cdots\cdots(5')$$

بتعويض العلاقتين $(5')$ و (5) في العلاقة (4) نحصل على عبارة الحل العام للمسألة الحدية المعطاة:

$$\boxed{u(x,t)=1+t+x\left(t^3-t+1\right)-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin(n\pi t)\sin(n\pi x)+\frac{12}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\left[n\pi t-\sin(n\pi t)\right]\sin(n\pi x)}$$

❹**(الفصل الثاني للعام 2004 – 2005)**: أوجد حل المعادلة:

$$u_{tt}=u_{xx}+\cos t \quad ,\ (0<x<\pi\ ,\ t>0)\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية: $u(x,0)=0\ ,\ u_t(x,0)=\sin x\ ,\ 0\le x\le\pi\ \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية: $u(0,t)=1\ ,\ u(\pi,t)=1+\pi t\quad ,\ t\ge 0\ \cdots\cdots\cdots(3)$

الحـل:

إن المسألة الحدية المعطاة هي مسألة غير متجانسة بشروط حدية غير صفرية وفيها:

$$a=1\,,\ \ell=\pi\ ,\ f(x,t)=\cos t\ ,\ \varphi(x)=0\ ,\ \psi(x)=\sin x\ ,\ \mu_1(t)=1\ ,\ \mu_2(t)=1+\pi t$$

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=U(x,t)+v(x,t)\ \cdots\cdots\cdots(4)$$

حيث أنَّ:

$$U(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{\ell}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]=1+\frac{x}{\pi}\left[1+\pi t-1\right]=1+xt\ \Rightarrow$$

$$\boxed{U(x,t)=1+xt}\ \cdots\cdots\cdots(5)$$

$$U_t(x,t)=x\quad,\ U_{tt}(x,t)=0\ ,\ U_{xx}(x,t)=0\quad,U(x,0)=1\ ,\ U_t(x,0)=x$$

أما $v(x,t)$ فهي حل للمسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=a^2v_{xx}+\overline{f}(x,t)$$

مع الشروط الابتدائية: $v(x,0)=\overline{\varphi}(x)\ ,\ v_t(x,0)=\overline{\psi}(x)$

والشروط الحدية الصفرية: $v(0,t)=0\quad,\quad v(\ell,t)=0$

علماً أنَّ:

$$\overline{f}(x,t)=f(x,t)-\left(U_{tt}-a^2U_{xx}\right)=\cos t-\left[0-1(0)\right]=\cos t$$
$$\overline{\varphi}(x)=\varphi(x)-U(x,0)=0-(1)=-1$$
$$\overline{\psi}(x)=\psi(x)-U_t(x,0)=\sin x-x$$

وبالتالي فإنَّ $v(x,t)$ هي حل للمسألة الحدية التالية:

$$v_{tt}=v_{xx}+\cos t \quad \cdots\cdots\cdots(1')$$

مع الشروط الابتدائية: $v(x,0)=-1\ ,\ v_t(x,0)=\sin x-x \quad \cdots\cdots\cdots(2')$

والشروط الحدية الصفرية: $v(0,t)=0 \quad , \quad v(1,t)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(3')$

وحل هذه المسألة الحدية الجديدة يعطى بالدستور التالي:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\cdots\cdots\cdots(4')$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{\varphi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi \quad , \quad D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\overline{\psi}(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

$$T_n(t)=\frac{\ell}{n\pi a}\int_0^{t}f_n(\tau)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}a(t-\tau)\right)d\tau$$

$$\overline{f_n}(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\overline{f}(\xi,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

إنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-1)\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\xi\right)d\xi=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(n\xi)d\xi=-\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(n\xi)\right]_{\xi=0}^{\xi=\pi}=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[\cos(n\xi)\right]_{\xi=0}^{\xi=\pi}=\frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n-1\right] \Rightarrow \boxed{C_n=\frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n-1\right]}$$

وأيضاً:

$$D_n=\frac{2}{n\pi(1)}\int_0^{\pi}(\sin\xi-\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\xi\right)d\xi=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}(\sin\xi-\xi)\sin(n\xi)d\xi$$

ومن أجل $n=1$ نجد أنَّ:

$$D_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin\xi-\xi)\sin(\xi)d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(\xi)\sin(\xi)d\xi-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\xi\sin(\xi)d\xi=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{2}{\pi}\left[-\xi\cos\xi\Big|_{\xi=0}^{\xi=\pi}+\underbrace{\int_0^{\pi}\cos(\xi)d\xi}_{=0}\right]=1-\frac{2}{\pi}\left[-\pi\cos\pi-0\right]=1-2=-1$$

أما من أجل $n\neq 1$ فإنَّ:

$$D_n=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}(\sin\xi-\xi)\sin(n\xi)d\xi=\frac{2}{n\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}\sin\xi\sin(n\xi)d\xi}_{=0\ ;\ n\neq1}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\xi\sin(n\xi)d\xi=$$

$$=0-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\xi\sin(n\xi)d\xi=-\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{1}{n}\xi\cos(n\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=\pi}+\frac{1}{n}\underbrace{\int_0^{\pi}\cos(n\xi)\,d\xi}_{=0}\right]=\frac{2}{n^2}(-1)^n$$

$$D_n=\begin{cases}-1\,,\ n=1\\ \frac{2}{n^2}(-1)^n\quad,\ n\neq1\end{cases}$$

وكما أنَّ:

$$\overline{f_n}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos t\ \sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\xi\right)d\xi=\frac{2}{\pi}\cos t\int_0^{\pi}\sin(n\xi)d\xi=\frac{2}{n\pi}\cos t\left[1-(-1)^n\right]$$

وكما أنه من أجل $n\neq 1$ فإنَّ:

$$T_n(t)=\frac{\pi}{n\pi(1)}\int_0^{t}\sin\left[\frac{n\pi}{\pi}(1)(t-\tau)\right]\left(\frac{2}{n\pi}\cos\tau\left[1-(-1)^n\right]\right)d\tau=$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\left[1-(-1)^n\right]\int_0^{t}\sin\left[n(t-\tau)\right]\cos\tau\,d\tau=$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\left[1-(-1)^n\right]\int_0^{t}\left[\sin\left[n(t-\tau)+\tau\right]+\sin\left[n(t-\tau)-\tau\right]\right]d\tau$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\left[1-(-1)^n\right]\int_0^{t}\left[\sin\left[nt+(1-n)\tau\right]+\sin\left[nt-(1+n)\tau\right]\right]d\tau$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\left[1-(-1)^n\right]\left[\frac{1}{(n-1)}\cos\left[nt+(1-n)\tau\right]+\frac{1}{(1+n)}\cos\left[nt-(1+n)\tau\right]\right]_{\tau=0}^{\tau=t}$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\left[1-(-1)^n\right]\left[\frac{1}{(n-1)}+\frac{1}{(n+1)}\left[\cos t-\cos(nt)\right]\right]=$$

$$=\frac{2n}{n^2(n^2-1)\pi}\left[1-(-1)^n\right]\left[\cos t-\cos(nt)\right]$$

$$\boxed{T_n(t)=\frac{2}{n(n^2-1)\pi}\left[1-(-1)^n\right]\left[\cos t-\cos(nt)\right]\ ;\ n\neq1}$$

أما من أجل $n=1$ فإنَّ:

$$T_1(t)=\frac{4}{\pi}\int_0^t \sin(t-\tau)\cos\tau\, d\tau=\frac{4}{\pi}\int_0^t \left[\sin\left[(t-\tau)+\tau\right]+\sin\left[(t-\tau)-\tau\right]\right]d\tau=$$

$$=\frac{4}{\pi}\sin t\int_0^t d\tau+\frac{4}{\pi}\int_0^t \sin(t-2\tau)\,d\tau=\frac{4}{\pi}t\sin t+\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}\cos(t-2\tau)\right]_{\tau=0}^{\tau=t}=$$

$$=\frac{4}{\pi}t\sin t+\frac{2}{\pi}\left[\cos(-t)-\cos t\right]=\frac{4}{\pi}t\sin t$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في عبارة الحل للمسألة الجديدة $(4')$ نجد أنَّ:

$$v(x,t)=\left[-\frac{4}{\pi}\cos t-\sin t\right]\sin x+\frac{4}{\pi}t\sin t\sin x+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n-1\right]\cos(nt)+\frac{2}{n^2}(-1)^n\sin(nt)\right]\sin(nx)+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n\left(n^2-1\right)\pi}\left[1-(-1)^n\right]\left[\cos t-\cos(nt)\right]\sin(nx)\cdots\cdots\cdots(5')$$

بتعويض العلاقتين $(5')$ و (5) في العلاقة (4) نحصل على عبارة الحل العام للمسألة الحدية المعطاة:

$$u(x,t)=1+xt+\left[\frac{4}{\pi}(t\sin t-\cos t)-\sin t\right]\sin x+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n-1\right]\cos(nt)+\frac{2}{n^2}(-1)^n\sin(nt)\right]\sin(nx)+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n\left(n^2-1\right)\pi}\left[1-(-1)^n\right]\left[\cos t-\cos(nt)\right]\sin(nx)$$

تمارين غير محلولة(الفصل الثالث):

❶(الفصل الأول للعام 2006 – 2007): أوجد حل المعادلة:

$$u_t=u_{xx}+3t^2+e^t\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشرط الابتدائي:

$$u(x,0)=x\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

الحـل: إن هذه المعادلة هي معادلة انتشار الحرارة على مستقيم لانهائي الطول وغير المتجانسة ، وفيها:

$$a=1\ ,\ f(x,t)=3t^2+e^t\ ,\ \varphi(x)=x$$

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\frac{d\xi}{2a\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}\frac{d\xi}{2a\sqrt{(t-\tau)}}d\tau=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}I_1+\frac{1}{\sqrt{\pi}}I_2\quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

ولنوجد كل من $I_1\ ,\ I_2$:

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\frac{d\xi}{2a\sqrt{t}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\xi\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}\frac{d\xi}{2\sqrt{t}}$$

ولحل هذا التكامل نجري التحويل التالي:

$$\frac{\xi-x}{2\sqrt{t}}=z\ \Rightarrow\ \frac{d\xi}{2\sqrt{t}}=dz\quad,\ \xi=x+2\sqrt{t}\,z\quad,\ \begin{cases}\xi=-\infty\ \Rightarrow\ z=-\infty\\ \xi=+\infty\ \Rightarrow\ z=+\infty\end{cases}$$

ومنه نجد أنَّ:

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x+2\sqrt{t}\,z\right)e^{-z^2}dz=x\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz+2\sqrt{t}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}z\,e^{-z^2}dz}_{=0}=\sqrt{\pi}\,x$$

حيث أن التكامل الثاني هو تكامل لدالة فردية على مجال متناظر فقيمته تساوي الصفر.

إيجاد I_2:

$$I_2=\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}f\,(\xi,\tau)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}\frac{d\xi}{2a\sqrt{(t-\tau)}}d\tau=\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\left(3\tau^2+e^{\tau}\right)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}}\frac{d\xi}{2\sqrt{(t-\tau)}}d\tau=$$

$$=\int_0^t\left(3\tau^2+e^{\tau}\right)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}}\frac{d\xi}{2\sqrt{(t-\tau)}}\right]d\tau\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

إن التكامل الداخلي في I_2 يحسب بالشكل:

لنجري التحويل:

$$\frac{\xi-x}{2\sqrt{t-\tau}}=z\ \Rightarrow\ \frac{d\xi}{2\sqrt{t-\tau}}=dz\quad,\ \xi=x+2\sqrt{t-\tau}\,z\quad,\ \begin{cases}\xi=-\infty\ \Rightarrow\ z=-\infty\\ \xi=+\infty\ \Rightarrow\ z=+\infty\end{cases}$$

ومنه فإنَّ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}}\frac{d\xi}{2\sqrt{(t-\tau)}}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz=\sqrt{\pi}$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$I_2=\int_0^t\left(3\tau^2+e^{\tau}\right)\left[\sqrt{\pi}\right]d\tau=\sqrt{\pi}\left[\int_0^t\left(3\tau^2+e^{\tau}\right)d\tau\right]=\sqrt{\pi}\left[\int_0^t3\tau^2d\tau+\int_0^te^{\tau}d\tau\right]$$

$$=\sqrt{\pi}\left[\tau^3\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}+e^{\tau}\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}\right]=\sqrt{\pi}\left(t^3+e^t-1\right)$$

وبتعويض كل من $I_1\ ,\ I_2$ في العلاقة (3) نجد أنَّ:

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\pi}\,x\right)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\sqrt{\pi}\left(t^3+e^t-1\right)\right]=x-1+t^3+e^t \Rightarrow \boxed{u(x,t)=x-1+t^3+e^t}$$

❷ **(الفصل الثاني للعام 2002 – 2003)**: أوجد حل المعادلة:

$$u_t-u_{xx}-u_x-u=0$$

والمحقق للشرط الابتدائي: $u(x,0)=x^2$

إن المعادلة المعطاة من النمط المكافئ وذات أمثال ثابتة وتكتب بالشكل:

$$u_t=u_{xx}+u_x+u \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

والشرط الابتدائي: $u(x,0)=x^2 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$

وفيها: $a=1\ ,\ b=1\ ,\ c=1\ ,\ f(x,t)=0$

ولحلها نجري التحويل التالي:

$$u(x,t)=e^{\left[c-\frac{b^2}{4a^2}\right]t-\frac{b}{2a^2}x}v(x,t) \Rightarrow u(x,t)=e^{\left[1-\frac{(1)^2}{4(1)^2}\right]t-\frac{1}{2(1)^2}x}v(x,t) \Rightarrow$$

$$u(x,t)=e^{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}t}v(x,t) \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

باشتقاق العلاقة (3) مرة بالنسبة لـ t ومرتين بالنسبة لـ x ثم التعويض في $(1)\,,(2)$ نجد أنَّ:

$$v_t=v_{xx}+(0)[e^{\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}t}] \Rightarrow v_t=v_{xx}$$

$$v(x,0)=x^2(e^{\frac{1}{2}x})=x^2e^{\frac{1}{2}x}$$

وبالتالي فالمسألة الجديدة هي:

$$v_t=v_{xx} \quad \cdots\cdots\cdots(1')$$

$$v(x,0)=x^2e^{\frac{1}{2}x} \quad \cdots\cdots\cdots(2')$$

وهذه المسألة الجديدة فيها: $a=1\ ,\ \overline{\varphi}(x)=x^2e^{\frac{1}{2}x}$ ، وهي معادلة انتشار الحرارة على مستقيم لانهائي الطول ومتجانسة أيضاً ، وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$v(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\varphi}(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\frac{d\xi}{2a\sqrt{t}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}I_1 \quad \cdots\cdots\cdots(3')$$

ومنه فإنَّ:

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\varphi}(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\frac{d\xi}{2a\sqrt{t}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^2e^{\frac{1}{2}\xi}\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}\frac{d\xi}{2\sqrt{t}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^2e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}+\frac{1}{2}\xi}\frac{d\xi}{2\sqrt{t}}$$

إن الأس للدالة الأسية الموجودة ضمن التكامل الأخير يكتب بالشكل:

$$-\frac{(\xi-x)^2}{4t}+\frac{1}{2}\xi=-\frac{(\xi-x)^2}{4t}+\frac{2\xi t}{4t}=-\frac{(\xi^2-2\xi x+x^2-2\xi t)}{4t}=-\frac{(\xi^2-2\xi(x+t)+x^2)}{4t}$$

$$=-\frac{\left[\xi^2-2\xi(x+t)+(x+t)^2\right]}{4t}+\frac{(x+t)^2-x^2}{4t}=-\frac{\left[\xi-(x+t)\right]^2}{4t}+\frac{x^2+2xt+t^2-x^2}{4t}$$

$$=-\frac{\left[\xi-(x+t)\right]^2}{4t}+\frac{2xt+t^2}{4t}=-\frac{\left[\xi-(x+t)\right]^2}{4t}+\frac{x}{2}+\frac{t}{4}$$

وبالتالي فإن التكامل الأخير يكتب بالشكل:

$$I_1=e^{\frac{x}{2}+\frac{t}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^2 e^{-\frac{\left[\xi-(x+t)\right]^2}{4t}}\frac{d\xi}{2\sqrt{t}}$$

ولحل هذا التكامل نجري التحويل التالي:

$$\frac{\xi-(x+t)}{2\sqrt{t}}=z \;\Rightarrow\; \frac{d\xi}{2\sqrt{t}}=dz \quad,\; \xi=(x+t)+2\sqrt{t}\,z \quad,\; \begin{cases}\xi=-\infty \Rightarrow z=-\infty\\ \xi=+\infty \Rightarrow z=+\infty\end{cases}$$

ومنه نجد أنَّ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(x+t)+2\sqrt{t}\,z\right]^2 e^{-z^2}dz=$$

$$=(x+t)^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz+4\sqrt{t}(x+t)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}z\,e^{-z^2}dz}_{=0}+4t\int_{-\infty}^{+\infty}z^2e^{-z^2}dz$$

$$=(x+t)^2\left(\sqrt{\pi}\right)+0+4t\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)=\sqrt{\pi}\left[(x+t)^2+2t\right]$$

حيث أن التكامل الثاني هو تكامل لدالة فردية على مجال متناظر فقيمته تساوي الصفر.

$$I_1=\sqrt{\pi}\,e^{\frac{x}{2}+\frac{t}{4}}\left[(x+t)^2+2t\right]$$

$$v(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}I_1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}\,e^{\frac{x}{2}+\frac{t}{4}}\left[(x+t)^2+2t\right]=e^{\frac{x}{2}+\frac{t}{4}}\left[(x+t)^2+2t\right]$$

وبالتعويض في العلاقة (3) نجد أن الحل المطلوب للمسألة المعطاة هو:

$$u(x,t)=e^{\frac{3}{4}t-\frac{1}{2}x}.e^{\frac{x}{2}+\frac{t}{4}}\left[(x+t)^2+2t\right]\Rightarrow \boxed{u(x,t)=e^{t}\left[(x+t)^2+2t\right]}$$

تمارين غير محلولة(الفصل الرابع):

❶**(الفصل الأول للعام 2014 – 2014):** أوجد حل معادلة لابلاس $\Delta u = 0$ في الاحداثيات الكروية حالة $u(r,\theta)$ **داخل** كرة نصف قطرها $R=1$ ، والمحقق للشرط الحدي الآتي:

$$(u - u_r)\big|_{r=1} = \frac{3}{2}\sin^2\theta$$

الحــل: إن حل المسألة المعطاة يعطى بالدستور التالي:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta) \cdots\cdots\cdots(1)$$

نشتق (1) بالنسبة لـ r فنجد أن:

$$u_r = \sum_{n=1}^{\infty} A_n n r^{n-1} P_n(\cos\theta)$$

ومنه فإنَّ:

$$u - u_r = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (r-n) r^{n-1} P_n(\cos\theta) \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2}\sin^2\theta = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos^2\theta = u - u_r\big|_{r=1} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (1-n) P_n(\cos\theta) =$$

$$= A_0 - A_2 P_2(\cos\theta) + \cdots\cdots$$

$$= A_0 - \frac{A_2}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cdots\cdots \Rightarrow$$

$$2 - 2\cos^2\theta = \left(A_0 + \frac{1}{2}A_2\right) - \frac{3}{2}A_2\cos^2\theta + \cdots\cdots$$

وبمطابقة الطرفين نجد أن:

$$A_0 + \frac{1}{2}A_2 = \frac{3}{2} \cdots\cdots\cdots(*) \quad , \quad -\frac{3}{2}A_2 = -\frac{3}{2} \cdots\cdots\cdots(**)$$

$$A_3 = A_4 = \cdots\cdots = 0 \quad , \quad \forall A_1$$

من $(**)$ نجد أن: $\boxed{A_2 = 1}$ وبالتعويض في $(*)$ نجد أنَّ:

$$A_0 + \frac{1}{2}(1) = \frac{3}{2} \Rightarrow A_0 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{A_0 = 1}$$

وبالتعويض في عبارة الحل (1) نجد أنَّ:

$$u(r,\theta) = A_0 + A_1 r P_1(\cos\theta) + A_2 r^2 P_2(\cos\theta) = 1 + A_1 r\cos\theta + r^2\left[\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right)\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{u(r,\theta) = 1 + A_1 r\cos\theta + \frac{1}{2}r^2\left(3\cos^2\theta - 1\right) \quad , \quad \forall A_1}$$

من الواضح أن للمسألة المعطاة عدد لانهائي من الحلول.